



Ces exercices de révision couvrent une large partie du programme de première année. Ils contiennent les exercices de la banque CCINP 2026 faisable en sup, à savoir faire **absolument**, des corrigés sont disponibles sur le site de la MPI

https://MPI.lecontedelisle.re/Banque_CCINP_2026.pdf

Les autres exercices sont des classiques vus pendant l'année de MP2I ou non.

Vous pouvez demander des indications et/ou discuter des exercices via le Mattermost de la MP(2)I

Les exercices du Cahier de Calcul (<https://colasbd.github.io/cdc/>) sont tous à maîtriser également.

La semaine de la rentrée, vous aurez un devoir de 2 h de Mathématiques portant sur les chapitres **suites, séries, algèbre linéaire – espaces vectoriels, matrices, déterminant** – du programme de MP2I. Il n'est pas impossible que certains exercices de ce poly y figurent.

Pour les très ambitieux parmi vous, je vous invite à vous intéresser aux livres de la collection **Oraux X-ENS** (7 tomes) de chez Cassini et aux livres **Les Maths en Tête** (2 tomes) de Xavier Gourdon aux éditions ellipses.



ENSEMBLES, APPLICATIONS ET STRUCTURES ALGÈBRIQUES

1 injectivité - surjectivité

Soit E, F, G trois ensembles, et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
- Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

2 Différence symétrique

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Pour toutes parties A et B de E on note $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

En particulier, pour toute partie A de E , $E \setminus A$ est le complémentaire de A dans E .

Pour toute partie A de E on appelle *fonction indicatrice* de A l'application notée $\mathbb{1}_A$ définie par

$$\forall x \in A, \mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ et } \forall x \in E \setminus A, \mathbb{1}_A(x) = 0.$$

On note plus simplement $\tilde{\mathbb{1}}$ la fonction indicatrice de E .

Enfin, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on appelle *différence symétrique* de A et B l'ensemble $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.
 - Exprimer $\mathbb{1}_{E \setminus A}$, $\mathbb{1}_{A \cap B}$, $\mathbb{1}_{A \setminus B}$ et $\mathbb{1}_{A \cup B}$ en fonction de $\tilde{\mathbb{1}}$, $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
 - En déduire $\mathbb{1}_{A \Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
 - Démontrer que

$$\mathbb{1}_{(A \Delta B) \Delta C} = \mathbb{1}_{A \Delta (B \Delta C)}.$$

- Démontrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif.

3 Groupe de matrices

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $G = \{M(x), x \in \mathbb{R}\}$ et $\times$ la multiplication usuelle dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $(G, \times)$ est un groupe.

4 Anneau intègre

On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est *intègre* si $\forall (x, y) \in A^2, x \times y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

- Les anneaux $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, $(\mathbb{R}[X], +, \times)$ et $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), +, \times)$ sont-ils intègres? Justifier.
- Démontrer que tout corps est un anneau intègre. La réciproque est-elle vraie?
- Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre et $(a, b, x) \in A^3$. On suppose que $x \neq 0$. Démontrer que
 - $a \times x = b \times x \Rightarrow a = b$;
 - $x \times a = x \times b \Rightarrow a = b$.

- Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre et $a \in A$ tel que $a \neq 0$. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \neq 0$.

- Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, intègre et ne possédant qu'un nombre fini d'éléments. Démontrer que $(A, +, \times)$ est un corps.



NOMBRES COMPLEXES

Cahier de Calcul : fiche 16.

5 CCINP 84 – Racines de l'unité

- Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

6 CCINP 89 – Nombres complexes

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

- On suppose que $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

- On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$.

$$\text{Montrer que } S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}.$$

7 Sommes de cos et sin

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$1. \text{ Calculer } C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \text{ et } S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx).$$

$$2. \text{ Calculer } \tilde{C}_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \text{ et } \tilde{S}_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx).$$

8 Sommes de racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

$$1. \text{ Calculer } \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k.$$

$$2. \text{ Soit } q \in \mathbb{N}. \text{ Calculer } \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^q.$$



ARITHMÉTIQUE

Cahier de Calcul : fiche 23.

9 CCINP 86 – Petit théorème de Fermat

- Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \nmid a$ et $p \nmid b$ alors $p \mid (a^p + b^p)$.
- Soit p un nombre premier.

- Prouver que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ et en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

- Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$. Indication : procéder par récurrence.

- En déduire, pour tout entier naturel n , que

$$p \text{ ne divise pas } n \Rightarrow n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

10 CCINP 94 – Théorème chinois

- En raisonnant par l'absurde, montrer que le système
 $(S) : \begin{cases} x \equiv 5 & [6] \\ x \equiv 4 & [8] \end{cases}$ n'a pas de solution appartenant à $\mathbb{Z}$.
- (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
(b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
- On considère le système $(S) :$
$$\begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 5 & [16] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$$
 dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
(a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
(b) Dédire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .

11 Racines rationnelles de polynômes entiers

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. On suppose que a et b sont premiers entre eux.
Prouver que $(a|c) \text{ et } (b|c) \iff ab|c$.
- Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, avec $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$.
Montrer que si α est racine de P , alors p divise a_0 et q divise a_n .
- Factoriser le polynôme

$$P(X) = 3X^3 + 4X^2 + 2X - 4$$

en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.



POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Cahier de Calcul : fiches 24 et 25.

12 CCINP 85 – Multiplicité d'une racine

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
(a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$.
(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
 a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$.
- Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

13 CCINP 87 – Interpolation de Lagrange

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

- Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leq n$ et $\forall i \in \{0, \dots, n\} P(a_i) = b_i$.
- Soit $k \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$.
Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque

$$\forall i \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

- Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$,

$$\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p.$$

14 CCINP 90 – Interpolation de Lagrange

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

- Montrer que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ P &\longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k).$$

- Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
- Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .

- Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .

Application

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.

Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

15 Division euclidienne Les ques-

tions 2) et 3) sont indépendantes.

- Énoncer le théorème de division euclidienne.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a \neq b$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$A(X) = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2.$$

Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $(X-2)^2$.

16 Racines simples

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que toutes les racines complexes du polynôme

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$$
 sont simples.

17 Polynômes réels scindés simples

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$.

- Soit $r \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Démontrer que si P admet r racines réelles distinctes, alors P' admet au moins $r-1$ racines réelles distinctes.
- Démontrer que si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples, alors P' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.
- Démontrer que si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors P' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

18 Produit de sin

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

- Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} e^{-i \frac{k\pi}{n}} = (-i)^{n-1}$.
- a) Déterminer les racines complexes du polynôme

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n-1} X^k.$$

- En déduire la valeur de

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i \frac{2k\pi}{n}}\right).$$

- Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

19 DES de $\frac{P'}{P}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$.

On suppose $a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts et on note $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_k)^{m_k}$.

- Démontrer que $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - a_k}$.
- Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles

$$F(X) = \frac{3X^2 + 10X + 1}{X^3 + 5X^2 + X + 5}$$

$$G(X) = \frac{3X^4 + 7X^3 + 4X^2 + 5X - 5}{X^3 - X^2 - X + 1}.$$



20 CCINP 55 – Suite récurrente

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

- (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
- (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .

- Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

21 CCINP 59 – Isomorphisme

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

- Démontrer que f est bijectif de deux manières :
 - sans utiliser de matrice de f ,
 - en utilisant une matrice de f .
- Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

22 CCINP 60 – Endomorphisme

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

- Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
- f est-il surjectif ?
- Déterminer une base de $\text{Im } f$.
- A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

23 CCINP 62 – Polynôme annulateur

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{id} = 0$.

- Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
- Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id})$.
- Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{id}) = \text{Ker}(f - 2\text{id})$.

24 CCINP 93 – Polynôme annulateur d'endomorphisme

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

- Montrer que $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E$.
- (b) [Montrer que]

$$\text{Im } u \subset \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}).$$

25 CCINP 64 – Image et noyau supplémentaires

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

- Démontrer que

$$E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2.$$

- (a) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

- (b) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.$$

26 CCINP 71 – Projection

Soit p , la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

27 Intersection et réunion de sev

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

- Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

28 Déterminant tridiagonal par formule de récurrence

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n .

- Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
- Déterminer D_n en fonction de n .

29 Image et noyau d'une composée

Soit E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Démontrer que

$$\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g;$$

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f);$$

$$f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Im } f \cap \text{Ker } g.$$

30 Inégalité triangulaire sur les rangs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f, g deux endomorphismes de E .

- Justifier que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$.
- Démontrer que

$$|\text{rg } f - \text{rg } g| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g.$$

- Démontrer que si $f + g$ est un isomorphisme et $f \circ g = 0$, alors $\text{Im } g = \text{Ker } f$.

31 Théorème des noyaux itérés

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \text{Ker } f^k$ et $I_k = \text{Im } f^k$.

- Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note d_k la dimension de N_k . Justifier que l'ensemble

$$J = \{k \in \mathbb{N}, d_k = d_{k+1}\}$$

admet un plus petit élément, que l'on notera p .

- Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \geq p$, $N_k = N_p$.
- En déduire que pour tout entier $k \geq p$, $I_k = I_p$.
- Démontrer que $E = N_p \oplus I_p$.

32 Endomorphismes cycliques

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

- Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^k(a) \neq 0$.
- Montrer que

$$\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$$

est une base de E .

- Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On note $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ les coordonnées de $g(a)$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Montrer que si $g \circ f = f \circ g$, alors

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k.$$

- En déduire que $g \circ f = f \circ g$ si et seulement si

$$g \in \text{Vect}(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}).$$

33

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

On suppose que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée.

Soit a un vecteur non nul de E .

- Justifier l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \lambda a$.

- Démontrer que pour tout $x \in \text{Vect}(a)$, $f(x) = \lambda x$.
- Soit $x \in E \setminus \text{Vect}(a)$. Démontrer que $f(x) = \lambda x$.
- En déduire que f est une homothétie.

34 Théorème d'Hadamard

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Dans cette question, on suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = 0$.
 - Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{ii}x_i| \leq \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{ij}x_j|$.
 - En déduire qu'il existe $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|a_{mm}| \leq \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq m} |a_{mj}|$.
- Démontrer que si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{ii}| > \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{ij}|$ (on dit que A est **à diagonale dominante**), alors A est inversible.



ALGÈBRE BILINÉAIRE

Cahier de Calcul : fiche 30.

35 CCINP 76 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

- (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
- Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

36 CCINP 79 – Produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et inégalité de Cauchy-Schwarz

- Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrer que $\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0$.
- Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

- Majorer $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

37 CCINP 39 – Espace ℓ^2 et biorthogonal en dimension infinie

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

- (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

- Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire dans ℓ^2 .

On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

- Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

- On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\cdot | \cdot)$).

Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

38 CCINP 77 – Propriétés de l'orthogonal en dimension finie

Soit E un espace euclidien.

- Soit A un sous-espace vectoriel de E .
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

39 CCINP 92 – Produit scalaire matriciel et supplémentarité orthogonale des matrices symétriques et antisymétriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

- Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

(a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

- Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer $F^\perp$.

40 CCINP 80 – Produit scalaire fonctionnel et projection orthogonale

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Démontrer que

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E .

- Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

41 CCINP 81 – Produit scalaire matriciel et distance à un sous-espace

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$, où $\text{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^t A$ par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
- Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
- Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

42 CCINP 82 – Produit scalaire matriciel et distance à un sous-espace

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

- Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.



NOMBRES RÉELS ET SUITES DE NOMBRES RÉELS

Cahier de Calcul : fiche 21.

43 Théorème du point fixe monotone

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.

- Justifier que l'ensemble $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$ admet une borne inférieure, que l'on notera α .
- Démontrer que $f(\alpha)$ est un minorant de A et en déduire une inégalité entre α et $f(\alpha)$.
- Démontrer que $f(\alpha) \in A$ et en déduire que $f(\alpha) = \alpha$.

44 Suite entière convergente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs, convergeant vers un nombre réel ℓ .

- Rappeler la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ .
- Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite stationnaire, c'est-à-dire

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = \ell.$$

45 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites réelles définies par

- $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 5a_n - \frac{8}{3};$$

- $u_0 = 5$, $u_1 = 12$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n;$$

- $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n;$$

- $w_0 = -3$, $w_1 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+2} = 8w_{n+1} - 16w_n.$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n , u_n , v_n et w_n en fonction de n .

46 Suites de Schwob et moyenne arithmético-géométrique

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq a \leq b$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.
- Étudier le sens de variation des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n - u_n \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

- Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune L .

On dit que L est la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b .

- Écrire dans le langage de votre choix une fonction `mag` qui prend en arguments a et b , ainsi qu'un réel ϵ strictement positif, et retourne

- le plus petit entier naturel p tel que $v_p - u_p \leq \epsilon$;
- les valeurs correspondantes de a_p et b_p .

Appliquer cette fonction à $a = 1789$, $b = 2026$, $\epsilon = 10^{-5}$ et en déduire un encadrement de L .



FONCTIONS USUELLES

Cahier de Calcul : fiches 2, 7, 9, 20.

47 Résoudre l'équation $\text{sh}(x) = 1$.

48 $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \text{sgn}(x) \frac{\pi}{2}$

Soit la fonction

$$f : x \mapsto \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x}.$$

- Soit $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Quelle relation existe-t-il entre $\tan(\frac{\pi}{2} - y)$ et $\tan(y)$?
- Démontrer par deux méthodes différentes que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\pi}{2}$$

- la première méthode utilisant la dérivée de la fonction f ;
 - la seconde utilisant la formule énoncée à la question précédente.
- La fonction f est-elle constante sur $\mathbb{R}^*$? Justifier.

49 Représenter graphiquement

$$f : x \mapsto \text{Arccos}[\cos(x)] + \text{Arcsin}[\sin(x)].$$

Justifier.

50 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les sommes $C_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \text{ch}(a + kb)$ et

$$S_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \text{sh}(a + kb).$$

51 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{(p-1)n} \text{sh}\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

- Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Simplifier la somme

$$S(n, N) = \sum_{k=0}^N \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right).$$

2. a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^{\text{sh}(x)}$.

b) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$, $e^{\text{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$.

- À l'aide des questions précédentes, démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.



LIMITE, ÉQUIVALENT ET DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

Cahier de Calcul : fiche 22.

52 CCINP 43 – Suite récurrente

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

(a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .

(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

- Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x).$$

53 Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer la limite de

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

54 Déterminer un développement limité

à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \ln(3e^x + e^{-x})$, et un développement limité à l'ordre 3 en 2π de $g : x \mapsto \sin(\sqrt{x^2 - 3\pi^2})$.

55 Calculer la limite lorsque $x \rightarrow 0$ de

$$\frac{2 \tan(x) - \tan(2x)}{x[1 - \cos(3x)]} \text{ et la limite lorsque } x \rightarrow 1 \text{ de } \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}.$$

56 Soit, pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \cos\left[n^2 \pi \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right].$$

Déterminer deux nombres réels a et b tels que $u_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

57 Déterminer un équivalent simple en

$$+\infty \text{ de } f : x \mapsto (x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}.$$

58 Déterminer le signe, au voisinage de

$$l'infini, de $u_n = \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.$$

59 Équation de Cauchy

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Soit $f \in \mathcal{S}$. On pose $a = f(1)$.
 - a) Calculer $f(0)$.
 - b) Démontrer que f est une fonction impaire.
 - c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
 - d) Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
 - e) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$.

60 Un théorème de point fixe

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ vérifiant $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Démontrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

61 Soit P un polynôme non nul, à coefficients réels et de degré impair.

Démontrer que P admet au moins une racine réelle.

62 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

1. Rappeler la définition de $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. Démontrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in [b, +\infty[$, $f(x) \geq f(0)$.
3. Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

63 Suite implicite

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique $a_n \in [0, 1]$ tel que $g_n(a_n) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $g_{n+1}(a_n)$.
3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
4. Déterminer la limite de $(a_n)_n$.

Cahier de Calcul : fiche 9.

64 CCINP 3 – Formule de Leibniz

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée n^{e} d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

65 CCINP 4 – Théorème de la limite de la dérivée

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Rightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par :
$$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

66 Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = a \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer a afin que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on suppose que a est la valeur ainsi obtenue.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}.$$

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

68 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.
3. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\alpha}{x+i} + \frac{\beta}{x-i}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les racines complexes du polynôme P_n .

69 Règle de l'Hôpital

Soit I un intervalle ouvert non vide et f, g deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

On suppose que f, g sont dérivables sur I et que g' ne s'annule pas sur I .

1. Énoncer et démontrer le théorème de Rolle. En donner une interprétation géométrique.
2. Soit $(a, b) \in I^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
3. Soit $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$.
4. Calculer la limite en 0^+ de $\frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}$ par deux méthodes, la première utilisant la question précédente, la seconde utilisant des développements limités.

70 Accroissements finis et série harmonique

1. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis. En donner une interprétation géométrique.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que

$$\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}.$$

3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

- b) En déduire que $H_n \sim \ln(n)$.

4. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$? Justifier.



- 71** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

- Déterminer la limite de (u_n) .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 - Calculer la limite de $S_{2n} - S_n$.
 - Démontrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ diverge. On pourra raisonner par l'absurde.
- Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$?

- 72** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \left[\frac{(2n)!}{n! n^n} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

- Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer v_n en fonction de u_n .
- En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

- 73** Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

et

$$v_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Déterminer, si elle existe, la limite de (u_n) .
- Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq t - \sin(t) \leq \frac{t^3}{6}.$$

- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3.$$
- Déterminer, si elles existent, les limites de $u_n - v_n$ puis v_n .

- 74** Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on

$$\text{note } I(p, q) = \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^p (t - \beta)^q dt.$$

- Calculer $I(p, 0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Exprimer $I(p, q)$ en fonction de $I(p+1, q-1)$.
- Calculer $I(p, q)$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

75

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$.

- À l'aide d'un changement de variable, démontrer que

$$\int_a^b t f(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

- Calculer $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin(x)} dx$.

76

Lemme de Riemann-Lebesgue (version facile)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt.$$

Démontrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

77

Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que I_n existe puis que $I_n > 0$.
- Déterminer pour tout entier $n \geq 2$ une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} .
- Exprimer I_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On distinguera le cas n pair du cas n impair et on donnera des expressions simples à l'aide de factorielles.
- Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déduire des questions 2) et 4) que $I_n \sim I_{n-1}$.
- Démontrer que la suite $(n I_n I_{n-1})_{n \geq 1}$ est constante.
- En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

78

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$I(x) = \int_{1/x}^x \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt.$$

- Justifier que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- Calculer $I'(x)$ pour tout $x > 0$.
- En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout $x > 0$.

79

On considère la fonction H définie sur

$$]1, +\infty[\text{ par } \forall x \in]1, +\infty[, H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

- Montrer que H est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- Montrer que la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie ℓ en $x = 1$.

- Donner la définition de $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \ell$. En déduire qu'il existe $a \in]1, +\infty[$ tel que u est bornée sur $]1, a[$.
- En utilisant la fonction u de la question 2), calculer la limite en 1^+ de la fonction H .

80

Théorème de la moyenne

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(c).$$



ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Cahier de Calcul : fiche 28.

81

CCINP 31 – Une EDL₂

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$ [en linéarisant le membre de droite].

82

CCINP 42 – Une EDL₁

On considère les deux équations différentielles suivantes

$$2x y' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2x y' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

- Résoudre (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Résoudre (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?



SÉRIES NUMÉRIQUES

Cahier de Calcul : fiche 29.

83

CCINP 5 – Série de Bertrand particulière

- On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) **Cas $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

- (b) **Cas $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}.$$

- Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 3} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}.$$

84 CCINP 6 – Critère de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

- Démontrer que si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell,$$

alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

- Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

85 CCINP 7 – série et équivalence

- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

- Prouver que si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
- Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que

$$u_n \sim_{+\infty} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

- Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(i-1) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3}-1)}.$$

(i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

86 CCINP 8 – Théorème Spécial des séries alternées

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

- (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k.$$

- Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
- (a) Étudier la convergence simple [pour $x \in \mathbb{R}$ fixé] de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

87 CCINP 46 – Série alternée

On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right).$$

- Prouver que, au voisinage de $+\infty$,

$$\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où α est un réel que l'on déterminera.

- En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.
- $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?



DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS

Cahier de Calcul : fiche 19.

88 CCINP 112 – Dénombrement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

- Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
- Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

89 CCINP 105 – Formule de Bayes

- Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

- On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.

Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.

Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

90 CCINP 101 – Chaîne de Markov

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C .

A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A .

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n l'événement « l'animal est en A après son n^{e} trajet ».

On note B_n l'événement « l'animal est en B après son n^{e} trajet ».

On note C_n l'événement « l'animal est en C après son n^{e} trajet ».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

- (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
- (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer [On admet qu'il existe] une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

- Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Remarque : Aucune expression finalisée de a_n , b_n et c_n n'est demandée.

91 CCINP 107 – Probabilités conditionnelles et suite arithmético-géométrique

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n^{e} tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

- Calculer p_1 .
- Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}.$$

- En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

92 CCINP 95 – Tirages avec remises et espérance de gain

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

- Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.

On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

- Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
- Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
 - Déterminer la loi de X .
 - Déterminer la loi de Y .

93 CCINP 98 – Autour de la loi binomiale

Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0, 1[$.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

- Donner la loi de X . Justifier.
- La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

- Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
- Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité

$$\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$

- Déterminer l'espérance et la variance de Z .

94 CCINP 99 – Loi faible des grands nombres

- Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Prouver que pour tout $a \in]0, +\infty[$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

3. Application

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i^{e} tirage.

95 CCINP 104 – Boules et compartiments

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

- Préciser les valeurs prises par X .
- (a) Déterminer la probabilité

$$P(X = 2).$$

- Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
- (a) Calculer $E(X)$.
- (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

96 CCINP 109 – Lois de première occurrence dans un tirage sans remise

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On suppose que les tirages sont équiprobables.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

- Déterminer la loi de X .
- Déterminer la loi de Y .



FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Cahier de Calcul : fiche 33.

97 CCINP 33 – Classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction de deux variables

On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

et $f(0, 0) = 0$.

- Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
- f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

98 CCINP 52 – Dérivées partielles et classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction de deux variables

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Prouver que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

- (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
- (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.

- Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.

- Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
- f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

**Solution de 1 : injectivité - surjectivité**

Revenir aux définitions. Fixer un élément quelconque de l'ensemble d'arrivée pour la surjectivité.

Solution de 3 : Groupe de matrices

Calculer le produit $M(x) \times M(y)$, cela devrait aussi donner l'inverse de $M(x)$.

Solution de 4 : Anneau intègre

Pour la dernière question, considérer l'application $x \mapsto a \times x$. Démontrer sa bijectivité pour un anneau fini.



NOMBRES COMPLEXES

Solution de 7 : Sommes de cos et sin

Commencer par calculer la somme $C_n(x) + iS_n(x)$ en discutant selon la valeur de x .

Factoriser l'arc moitié.

Utiliser la formule du binôme de Newton pour la seconde question.

Solution de 8 : Sommes de racines de l'unité

Reconnaître la somme des termes d'une suite géométrique. Discuter selon la valeur de la raison.

Pour la deuxième question, on pourra distinguer deux cas, selon que q divise n ou q ne divise pas n .



ARITHMÉTIQUE

Solution de 11 : Racines rationnelles de polynômes entiers

Remplacer l'indéterminée par la fraction p/q . Multiplier le tout par q^n puis isoler les termes pertinents.



POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Solution de 15 : Division euclidienne

Évaluer le reste en les racines du diviseur. Utiliser la dérivée pour exploiter les racines multiples.

Solution de 16 : Racines simples

Raisonner par l'absurde. Exprimer la dérivée $P'_n(X)$ en fonction de $P_{n-1}(X)$.

Solution de 17 : Polynômes réels scindés simples

Appliquer le théorème de Rolle entre deux racines consécutives. Compter les racines de la dérivée.

Solution de 18 : Produit de sin

Mettre en facteur l'arc moitié dans l'expression complexe.

Pour la dernière question, utiliser les relations d'Euler.



ALGÈBRE LINÉAIRE

Solution de 28 : Déterminant tridiagonal par formule de récurrence

Développer le déterminant suivant la première ligne. Recommencer l'opération sur le cofacteur obtenu.

Solution de 29 : Image et noyau d'une composée

Appliquer strictement les définitions d'image et de noyau. Écrire les équations d'appartenance.

Solution de 33 :

Pour la troisième question, on pourra s'intéresser au vecteur $a + x$ et à son image par f .



NOMBRES RÉELS ET SUITES DE NOMBRES RÉELS

Solution de 43 : Théorème du point fixe monotone

Justifier que l'ensemble minoré n'est pas vide. Exploiter la croissance de la fonction pour conclure.

Solution de 44 : Suite entière convergente

Écrire la définition de la limite en choisissant la valeur $\varepsilon < 1/2$.

Combien d'entier peut contenir un intervalle de longueur < 1 ?

Solution de 45 :

Résoudre l'équation caractéristique pour chaque relation de récurrence linéaire double.



FONCTIONS USUELLES

Solution de 47 :

Effectuer le changement de variable $t = e^x$. Résoudre l'équation du second degré obtenue.

Solution de 49 :

Exploiter la périodicité et la parité. Tracer sur le segment $[0, \pi]$ puis étendre le tracé.

Solution de 50 :

Passer en forme exponentielle. Sommer les suites géométriques obtenues.



LIMITE, ÉQUIVALENT ET DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

Solution de 53 :

Passer sous forme exponentielle. Utiliser le développement limité du logarithme naturel en zéro.

Solution de 54 :

Factoriser le terme prépondérant dans le logarithme. Effectuer un changement de variable pour la fonction trigonométrique.

Solution de 55 :

Effectuer des développements limités au voisinage des points considérés.

Solution de 56 :

$$\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Solution de 57 :

Transformer l'expression sous forme exponentielle. Poser le changement de variable $u = 1/x$.

Solution de 58 :

Comparer les développements limités des deux fonctions au voisinage de zéro.



CONTINUITÉ

Solution de 59 : Équation de Cauchy

Démontrer l'égalité sur les entiers naturels par récurrence. L'étendre aux relatifs par imparité puis aux rationnels. Passer aux réels par caractérisation séquentielle de la densité.

Solution de 60 : Un théorème de point fixe

Étudier le signe de la fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(x) - x$. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution de 61 :

Déterminer les limites en l'infini. Conclure avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution de 62 :

Fixer une borne. Montrer que la fonction dépasse cette borne à l'extérieur d'un segment.

Solution de 63 : Suite implicite

Étudier les variations de g_n .



DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Solution de 67 : Inégalité de convexité

Utiliser la concavité de $\ln$.

Solution de 69 : Règle de l'Hôpital

Pour la deuxième question, on pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction $h : x \mapsto f(x) - f(a) - \lambda(g(x) - g(a))$, où λ est un réel bien choisi.



CALCUL INTÉGRAL

Solution de 71 :

Reconnaître une somme de Riemann.

Solution de 72 :

Utiliser la composition par le logarithme. Reconnaître une somme de Riemann.

Solution de 76 : Lemme de Riemann-Lebesgue (version facile)

Intégrer par parties.

Solution de 80 : Théorème de la moyenne

Appliquer le théorème des accroissements finis à une fonction convenablement choisie.