

TD * ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS, CALCUL DIFFÉRENTIEL

1 Différentielle de l'inverse

Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, puis que l'application $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point.

On pourra commencer par la différentielle en I_n .

2 Optimisation et convexité

Soit \mathcal{U} un ouvert convexe de \mathbb{R}^2 et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable).

1. Montrer que si $a, b \in \mathcal{U}$, $df(a)(b-a) \leq f(b) - f(a)$.
2. Montrer que tout point critique est un minimum global.
3. Montrer que les points critiques forment un ensemble convexe fermé.

3 Mines - X

Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\text{tr } M, \text{tr}(M^2), \dots, \text{tr}(M^n)) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est différentiable en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $df(M)$.
2. Relier le rang de $df(M)$ et le degré du polynôme minimal de M .
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4 Vous reprendrez encore du principe variationnel ?

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$.

1. Montrer que $f : x \in E \mapsto (u(x)|x)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point.
2. Montrer que $F : x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et que ses points critiques sont les vecteurs propres de u .

5 X Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et

$$\Gamma = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Maximiser $\Phi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1$ sur Γ .