

1 Un prolongement au principe variationnel

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$.

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $\frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}$ lorsque x parcourt $E \setminus \{0_E\}$.

Solution de 1 : Un prolongement au principe variationnel

Lorsque E est de dimension 1, c'est une fonction qui vaut constamment la seule valeur propre de u .

Lorsque E est de dimension au moins 2, c'est une fonction continue sur un connexe par arcs qui admet comme minimum et maximum ceux de $\text{Sp } u$.

Par théorème des valeurs intermédiaire, les valeurs prises sont donc $[\min \text{Sp } u, \max \text{Sp } u]$.

2 Théorème du minimax : lemme de Courant-Fischer-Weyl

Soit E euclidien de dimension n , u un endomorphisme autoadjoint de E , $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u , $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthodagonalisante de u , e_i étant un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i .

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $F_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$. Montrer que

$$\lambda_k = \max_{\substack{x \in E_k \\ \|x\|=1}} (u(x)|x) = \min_{\substack{x \in F_k \\ \|x\|=1}} (u(x)|x).$$

2. Soit $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces de E de dimension k . Montrer que

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (u(x)|x) \right] = \max_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (u(x)|x) \right]$$

3. Application : le théorème d'entrelacement de Cauchy

On suppose que G est un hyperplan de E , que p est la projection orthogonale sur G et v l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur G .

Montrer que v est autoadjoint et que, si $\lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_{n-1}$ sont les valeurs propres de v , alors

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda'_{n-1} \leq \lambda_n.$$

Solution de 2 : Théorème du minimax : lemme de Courant-Fischer-Weyl

FGN 7.2.56 et 2.57

Remarquons que pour tout sous-espace F de E , les bornes de la fonction continue $x \mapsto (f(x)|x)$ définie sur la sphère unité de F sont atteintes, puisque cette sphère est compacte car F est de dimension finie. Les quantités $\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x)$ et $\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x)$ sont donc bien définies.

1. Si $x \in E_k$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i$, avec $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, alors on a

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^k x_i \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad (f_1(x)|x) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2 \leq \lambda_k \|x\|^2.$$

Si $\|x\| = 1$, alors $(f(x)|x) \leq \lambda_k$. Comme de plus, on a $(f_1(e_k)|e_k) = \lambda_k$, on obtient $\lambda_k = \max_{\substack{x \in E_k \\ \|x\|=1}} (f_1(x)|x)$.

De même, pour $x \in F_k$, $x = \sum_{i=k}^n x_i e_i$, avec $(x_k, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k+1}$, on a

$$(f_2(x)|x) = \sum_{i=k}^n x_i^2 \lambda_i \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2 \geq \lambda_k$$

si $\|x\| = 1$. Sachant que, de plus, on a $(f_2(e_k)|e_k) = \lambda_k$, on conclut que $\lambda_k = \min_{\substack{x \in F_k \\ \|x\|=1}} (f_2(x)|x)$.

2. Pour $F \in \mathcal{F}_k$, F et E_k ne peuvent être en somme directe puisque $\dim F + \dim E_k > n$. Ainsi, on a $F \cap E_k \neq \{0_E\}$. Si x est un élément de $F \cap E_k$ de norme 1, on a d'après la question 1, $(f(x)|x) \geq \lambda_k$. On en déduit que $\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \geq \lambda_k$ et cela étant vrai pour tout $F \in \mathcal{F}_k$, on a

$$\inf_{F \in \mathcal{F}_k} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right] \geq \lambda_k.$$

Sachant que, de plus, $\max_{\substack{x \in E_k \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) = \lambda_k$, on obtient

$$\min_{F \in \mathcal{F}_k} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right] = \lambda_k.$$

De même, pour $F \in \mathcal{F}_{n-k+1}$, on montre que $\dim(F \cap E_k) \geq 1$; si x est un élément de $F \cap E_k$ de norme 1, alors $(f(x)|x) \leq \lambda_k$ et donc $\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \leq \lambda_k$. Ceci étant vrai pour tout $F \in \mathcal{F}_{n-k+1}$, on en déduit

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right] \leq \lambda_k.$$

Sachant que $\min_{\substack{x \in E_k \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) = \lambda_k$, on obtient

$$\max_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right] = \lambda_k.$$

3. L'endomorphisme p est autoadjoint (c'est un projecteur orthogonal). On a donc, pour $(x, y) \in G^2$,

$$(g(x)|y) = (p \circ f(x)|y) = (f(x)|p(y)) = (f(x)|y),$$

et de même $(x|g(y)) = (x|f(y))$. Sachant que $(f(x)|y) = (x|f(y))$ puisque f est autoadjoint, on en déduit que $(g(x)|y) = (x|g(y))$: g est donc autoadjoint.

Pour $1 \leq h \leq n-1$, notons $\mathcal{F}_k$ (resp. $\mathcal{F}'_k$) l'ensemble des sous-espaces de E (resp. de G) de dimension k . Pour tout $F \in \mathcal{F}'_k$, on a

$$\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (g(x)|x) = \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x).$$

En appliquant le théorème du minimax à l'endomorphisme autoadjoint g de G , on obtient, pour $1 \leq h \leq n-1$,

$$\lambda'_k = \min_{F \in \mathcal{F}'_k} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (g(x)|x) \right] = \min_{F \in \mathcal{F}'_k} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right].$$

De l'inclusion $\mathcal{F}'_k \subset \mathcal{F}_k$, on déduit

$$\min_{F \in \mathcal{F}'_k} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right] \geq \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right],$$

c'est-à-dire $\lambda'_k \geq \lambda_k$.

On obtient de même,

$$\lambda'_k = \max_{F \in \mathcal{F}'_{n-k}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right]$$

et, puisque $\mathcal{F}'_{n-k} \subset \mathcal{F}_{n-k}$,

$$\max_{F \in \mathcal{F}'_{n-k}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right] \leq \max_{F \in \mathcal{F}_{n-k}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x)|x) \right],$$

c'est-à-dire $\lambda'_k \leq \lambda_{k+1}$. On a finalement, pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\lambda_k \leq \lambda'_k \leq \lambda_{k+1}.$$

Cet exercice est souvent posé de manière matricielle : si A est une matrice symétrique réelle de taille n et si B est la sous-matrice de A obtenue en ôtant la ligne et la colonne d'indice k fixé, alors on a

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$$

où $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ sont celles de B . Il s'agit évidemment du résultat de l'exercice appliqué à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et en prenant pour G l'hyperplan $\text{Vect}(e_i)_{i \neq k}$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3 Décomposition en valeurs singulières

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est symétrique positive.
2. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et V et des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$A = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V.$$

On pourra faire un changement de base de la base canonique vers une base orthodagonalisante de $A^T A$.

3. Le retrouver en utilisant une décomposition polaire.

Solution de 3 : Décomposition en valeurs singulières

FGN 7 2.42

1. C'est un fait classique : la matrice $A^T A$ est symétrique et pour montrer qu'elle est positive, on constate que, si $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$X^T (A^T A) X = \|AX\|^2 \geq 0,$$

où $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique. Ainsi $A^T A$ est positive.

2. Analyse. S'il existe deux matrices orthogonales U et V telles que l'on ait $A = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V$, alors

$$\begin{aligned} A^T A &= V^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^T U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V \\ &= V^T \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) V. \end{aligned}$$

donc $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ sont nécessairement les valeurs propres de $A^T A$, ce qui détermine les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de manière unique.

Synthèse. D'après la question 1 la matrice $A^T A$ est symétrique positive donc diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Si on note $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ ses valeurs propres avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positifs, il existe $V \in \mathcal{O}(n)$ telle que

$$A^T A = V^T \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) V.$$

Posons alors $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a donc $A^T A = (DV)^T D V$: cela implique l'existence d'une matrice $U \in \mathcal{O}(n)$ telle que $A = U D V$. Donnons une rédaction matricielle de ce résultat important.

On cherche $U \in \mathcal{O}(n)$ telle que $AV^T = UD$. Posons $AV^T = B$ de coefficients $(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. L'égalité $B^T B = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ se traduit, par

$$\sum_{k=1}^n b_{ki} b_{kj} = \lambda_i^2 \delta_{ij},$$

pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. En appelant $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de B , on a donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\langle C_i, C_j \rangle = \lambda_i^2 \delta_{ij}.$$

Autrement dit, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est orthogonale et pour tout i , $\|C_i\|^2 = \lambda_i^2$.

Soit $J = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \neq 0\}$. Posons $u_i = \frac{1}{\lambda_i} C_i$ pour $i \in J$.

La famille $(u_i)_{i \in J}$ est orthonormale. On la complète en une base orthonormale $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

La matrice U dont les vecteurs colonnes sont $u_1, \dots, u_n$ est orthogonale et on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_i = \lambda_i u_i$. En effet, si $i \in J$, c'est vrai par construction et si $i \notin J$, cela résulte de ce que $\lambda_i = 0$ et $C_i = 0$.

Matriciellement, cela se traduit par l'égalité $B = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ souhaitée.

3. La décomposition polaire dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = QS$ où $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Par théorème spectral, on a D diagonale et $V \in \mathcal{O}(n)$ tel que $S = V^T D V$.

En posant $U = QV^T \in \mathcal{O}(n)$, on obtient la décomposition en valeurs singulières de A .

4 Centrale Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dira que M a la propriété (P) si, et seulement si, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que M soit la sous-matrice de U obtenue en supprimant les dernières ligne et colonne de U et que U soit une matrice orthogonale, soit encore si, et seulement si, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$U = \begin{pmatrix} & & \alpha_{2n+1} \\ & M & \vdots \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \dots & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in O(n+1).$$

1. Ici

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les λ_i pour que M ait la propriété (P).

2. Ici $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M ait la propriété (P).
3. Si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = US$. On admettra qu'une telle décomposition existe encore si M n'est pas inversible.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque ait la propriété (P). Cette condition portera sur $M^T M$.
5. Montrer le résultat admis dans la question 3.

Solution de 4 : Centrale

1. Si M possède la propriété (P) alors les colonnes de la matrice U introduites doivent être unitaires donc

$$\forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i^2 + \alpha_i^2 = 1$$

et elles doivent être deux à deux orthogonales donc

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \alpha_i \alpha_j = 0.$$

Cette dernière condition ne permet qu'au plus un α_k non nul et alors $|\lambda_k| \leq 1$ tandis que pour $i \neq k$, $|\lambda_i| = 1$. Inversement, si tous les λ_i vérifient $|\lambda_i| = 1$ sauf peut-être un vérifiant $|\lambda_k| < 1$, alors on peut construire une matrice U affirmant que la matrice M possède la propriété (P) en posant

$$\forall 1 \leq i \neq k \leq n, \alpha_i = \alpha_{2n+2-i} = 0, \alpha_k = \alpha_{2n+2-k} = \sqrt{1 - \lambda_k^2} \text{ et } \alpha_{n+1} = -\lambda_k.$$

2. La matrice M est orthogonalement diagonalisable, on peut donc écrire

$$M = P^T D P \text{ avec } P \in \mathcal{O}(n) \text{ et } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Considérons alors la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Si la matrice M possède la propriété (P) alors on peut introduire $U \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ prolongeant M et alors

$$V = Q^T U Q = \begin{pmatrix} & & \beta_{2n+1} \\ & D & \vdots \\ \beta_1 & \dots & \beta_n & \dots & \beta_{n+1} \end{pmatrix} \in O_{n+1}(\mathbb{R})$$

ce qui entraîne que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de M sont toutes égales à ± 1 sauf peut-être un élément de $[-1; 1]$. La réciproque est immédiate.

3. La matrice $M^T M$ est symétrique définie positive. On peut donc en diagonalisant orthogonalement celle-ci déterminer une matrice S symétrique définie positive telle que

$$M^T M = S^2.$$

On pose alors $U = MS^{-1}$ et l'on vérifie $U \in \mathcal{O}(n)$ par le calcul de $U^T U$.

4. Supposons que la matrice $M = US$ possède la propriété (P). En multipliant par la matrice

$$V = \begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(n+1)$$

on démontre que la matrice S possède aussi la propriété (P). Puisque les valeurs propres de S sont les racines des valeurs propres de $M^T M$, on obtient la condition nécessaire suivante : les valeurs propres de $M^T M$ doivent être égales à 1 sauf peut-être une dans $[0; 1]$ (ces valeurs propres sont nécessairement positives). La réciproque est immédiate.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour p assez grand, la matrice

$$M_p = M + \frac{1}{p} I_n$$

est assurément inversible ce qui permet d'écrire $M_p = U_p S_p$ avec U_p orthogonale et S_p symétrique réelle. La suite (U_p) évolue dans le compact $\mathcal{O}(n)$, elle possède une valeur d'adhérence $U_\infty \in \mathcal{O}(n)$ et la matrice $S_\infty = U_\infty^{-1} M$ est symétrique réelle en tant que limite d'une suite de matrices symétriques réelles. On peut donc conclure.

5 Rotations qui commutent

- Montrer que N est une norme sous-multiplicative et invariante par conjugaison par des matrices orthogonales.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{SO}(3)^2$. On suppose que $N(B - I_3) < 2$ et que A commute avec $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Montrer que A et B commutent.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{SO}(3)^2$. Montrer que

$$N(I_3 - [A, B]) \leq 2N(I_3 - A)N(I_3 - B).$$

Solution de 5 : Rotations qui commutent

FGN 7 1.48

- Classique. La norme N est la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On peut supposer que A et B sont distinctes de I_3 sans quoi le résultat est trivial.
Il est naturel de commencer par étudier à quelle condition ces deux rotations de $\mathbb{R}^3$ commutent. Notons D l'axe de la rotation A et D' celui de B . Il s'agit de l'espace propre pour la valeur propre 1. Si A et B commutent, la droite D' est stable par A . Si A n'est pas un retournement, alors la seule droite stable par A est son axe D et on a alors $D = D'$.
En revanche, si A est le retournement d'axe D , les droites stables par A sont D et toutes les droites du plan $D^\perp$. De même si B n'est pas un retournement, alors $D = D'$. La synthèse est facile à faire : deux rotations de même axe commutent car $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif et deux retournements d'axe orthogonaux aussi (les deux retournements se codiagonalisent dans une même base orthonormée).
Étudions maintenant les deux hypothèses. Il existe une matrice orthogonale P telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B'.$$

D'après les propriétés de la norme N on a

$$(N(B - I_3))^2 = (N(B' - I_3))^2 = 2(\cos \theta - 1)^2 + 2\sin^2 \theta = 4 - 4\cos \theta.$$

L'hypothèse faite sur B signifie donc que $\cos \theta > 0$ et en particulier que B n'est pas un retournement.

On va donc essayer de montrer que A et B ont le même axe. Par hypothèse A commute avec $ABA^{-1}B^{-1}$ donc aussi avec $BA^{-1}B^{-1}$ et avec son inverse $C = BAB^{-1}$.

L'axe de cette rotation C est $B(D)$ où D désigne toujours l'axe de A . Comme B n'est pas un retournement, $B(D)$ ne peut pas être orthogonal à D et on a donc nécessairement $B(D) = D$.

La seule droite invariante par B étant son axe D' on a donc $D = D'$, ce qui permet de conclure.

- Cette question est indépendante de la précédente et le résultat est vrai en toute dimension. On utilise le fait que la norme N est invariante lorsqu'on multiplie à gauche ou à droite par une matrice orthogonale. On a

$$\begin{aligned} N(I_3 - [A, B]) &= N(I_3 - ABA^{-1}B^{-1}) = N(BA - AB) \\ &\leq N(BA - A - B + I_n) + N(A + B - I_n - AB) \\ &= N((B - I_3)(A - I_3)) + N(-(A - I_3)(B - I_3)) \\ &\leq 2N(I_3 - A)N(I_3 - B), \end{aligned}$$

par la sous-multiplicativité de la norme.