

1 Un prolongement au principe variationnel

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$.

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $\frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}$ lorsque x parcourt $E \setminus \{0_E\}$.

2 Théorème du minimax : lemme de Courant-Fischer-Weyl

Soit E euclidien de dimension n , u un endomorphisme autoadjoint de E , $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u , $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthodiagonalisante de u , e_i étant un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i .

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $F_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$. Montrer que

$$\lambda_k = \max_{\substack{x \in E_k \\ \|x\|=1}} (u(x)|x) = \min_{\substack{x \in F_k \\ \|x\|=1}} (u(x)|x).$$

2. Soit $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces de E de dimension k . Montrer que

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (u(x)|x) \right] = \max_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (u(x)|x) \right]$$

3. Application : le théorème d'entrelacement de Cauchy

On suppose que G est un hyperplan de E , que p est la projection orthogonale sur G et ν l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur G .

Montrer que ν est autoadjoint et que, si $\lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_{n-1}$ sont les valeurs propres de ν , alors

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda'_{n-1} \leq \lambda_n.$$

3 Décomposition en valeurs singulières

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est symétrique positive.
2. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et V et des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$A = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V.$$

On pourra faire un changement de base de la base canonique vers une base orthodiagonalisante de $A^T A$.

3. Le retrouver en utilisant une décomposition polaire.

4 Centrale Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dira que M a la propriété (P) si, et seulement si, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que M soit la sous-matrice de U obtenue en supprimant les dernières ligne et colonne de U et que U soit une matrice orthogonale, soit encore si, et seulement si, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$U = \begin{pmatrix} & & \alpha_{2n+1} \\ & M & \vdots \\ & & \alpha_{n+2} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \dots & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in O(n+1).$$

1. Ici

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les λ_i pour que M ait la propriété (P) .

2. Ici $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M ait la propriété (P) .
3. Si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $U \in O(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = US$. On admettra qu'une telle décomposition existe encore si M n'est pas inversible.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque ait la propriété (P) . Cette condition portera sur $M^T M$.
5. Montrer le résultat admis dans la question 3.

5 Rotations qui commutent Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $N(M) = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$.

1. Montrer que N est une norme sous-multiplicative et invariante par conjugaison par des matrices orthogonales.
2. Soit $(A, B) \in \mathcal{S} O(3)^2$. On suppose que $N(B - I_3) < 2$ et que A commute avec $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Montrer que A et B commutent.
3. Soit $(A, B) \in \mathcal{S} O(3)^2$. Montrer que

$$N(I_3 - [A, B]) \leq 2N(I_3 - A)N(I_3 - B).$$