

Solution de 1 : Remplacement de l'inégalité triangulaire

Le sens direct, c'est du cours.

Réciproquement, si $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est défini-positive, homogène et que sa boule unité fermée est convexe, soit $x, y \in E$.

Si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$, l'inégalité triangulaire est immédiate.

Sinon, on s'intéresse à $(1-t)\frac{x}{N(x)} + t\frac{y}{N(y)} \in B'(0_E, 1)$ pour $t = \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}$ et on obtient $\frac{N(x+y)}{N(x)+N(y)} \leq 1$ (sans oublier que l'on ne sait pas encore que N est une norme mais le fait qu'elle soit défini-positive et homogène permet de justifier les calculs.)

Solution de 2 : Caractérisation des normes euclidiennes

L'identité du parallélogramme, c'est

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Le sens direct, c'est du cours.

Réciproquement, si $\|\cdot\|$ est une norme vérifiant l'identité du parallélogramme.

On pose

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

On a alors facilement une forme symétrique définie-positive.

Seule la bilinéarité demande un peu de travail.

On commence par montrer que $(x+x'|y) = (x|y) + (x'|y)$. Or

$$(x+x'|y) = \frac{1}{4}(\|x+x'+y\|^2 - \|x+x'-y\|^2)$$

et, par l'identité du parallélogramme,

$$(x|y) + (x'|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x'+y\|^2 - \|x+y\|^2 - \|x'+y\|^2) = \frac{1}{8}(\|x+x'+2y\|^2 - \|x+x'-2y\|^2)$$

Reste à utiliser encore l'identité du parallélogramme :

$$\|x+x'+2y\|^2 = \|(x+x'+y)+y\|^2 = 2(\|x+x'+y\|^2 + \|y\|^2) - \|x+x'\|^2$$

et

$$\|x+x'-2y\|^2 = \|(x+x'-y)-y\|^2 = 2(\|x+x'-y\|^2 + \|y\|^2) - \|x+x'\|^2$$

ce qui permet bien de conclure $(x+x'|y) = (x|y) + (x'|y)$.

Pour $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$, ce n'est pas très simple non plus : comme dans l'exercice classique qui demande de trouver les morphismes additifs continus de $\mathbb{R}$, on le vérifie par récurrence pour $\lambda \in \mathbb{N}$, puis, le morphisme de groupe additif $x \mapsto (x|y)$ étant impair, c'est vrai pour $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Pour $\lambda = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers, on a $q(\lambda x|y) = (q\lambda x|y) = (px|y) = p(x|y)$ ce qui permet de conclure.

Enfin, la continuité de la norme (elle est 1-lipschitzienne) permet de passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ par densité, et de conclure.

Solution de 3 : X

Non : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables mais ne peuvent avoir même norme.

Solution de 4 :

Posons $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(P) = P(0)$.

Le cas de N_1 se traite facilement avec les résultats sur les fonctions continues : l'application φ est linéaire et puisque $|\varphi(P)| \leq N_1(P)$, cette application est continue. On en déduit que $\Omega = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert relatif à E c'est-à-dire un ouvert de E pour la norme N_1 .

Mais nous n'avons pas encore vu ces résultats. On peut montrer directement que Ω est ouvert pour N_1 directement : si $P \in \Omega$, on vérifie que $B_{N_1}(P, |P(0)|) \subset \Omega$ car si Q appartient à cette boule, $|P(0) - Q(0)| < |P(0)|$ donc $|Q(0)| > 0$.

Où alors on montre que $\Omega^c = \{P \in E, P(0) = 0\}$ est fermé car si $(P_n)_n$ est une suite d'éléments de E convergeant vers Q au sens de N_1 (donc uniformément sur $[0, 1]$), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 0$ donc $Q(0) = 0$ (la convergence uniforme implique la convergence simple) soit $Q \in \Omega^c$.

Pour la norme N_2 , montrons que la partie Ω n'est pas ouverte en observant qu'elle n'est pas voisinage de son point $P = 1$. Pour cela considérons la fonction continue $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x$ si $x \in [0, 1]$ et 1 sinon.

Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant

$$\sup_{t \in [0;2]} |P_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et en particulier

$$P_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad N_2(P_n - P) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Considérons alors la suite de polynômes (Q_n) avec

$$Q_n = P_n - P_n(0).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0) = 0$ donc $Q_n \notin \Omega$ et

$$N_2(Q_n) \leq N_2(P_n - P) + |P_n(0)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$Q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_2} P.$$

Puisque la partie Ω n'est pas voisinage de chacun de ses points, elle n'est pas ouverte pour la norme N_2 .

Solution de 6 : X

Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer $F + \text{Vect}(u)$ fermé pour tout $u \notin F$. Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de $F + \text{Vect}(u)$ de limite x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $x_n = y_n + \lambda_n u$ avec $y_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$. Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite (λ_n) est bornée. Si la suite (λ_n) n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$. Posons alors $z_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n + u$. Puisque $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ et $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$, on a $\|z_n\| \rightarrow 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n} y_n \rightarrow -u$. Or la suite de terme général $\frac{1}{\lambda_n} y_n$ est une suite d'éléments de l'espace fermé F , donc $-u \in F$ ce qui exclu. Ainsi, la suite (λ_n) est bornée et l'on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(n)})$ de limite $\lambda \in \mathbb{K}$. Par opérations, la suite $(y_{\varphi(n)})$ est alors convergente. En notant y sa limite, on a $y \in F$ car l'espace F est fermé. En passant la relation $x_n = y_n + \lambda_n u$ à la limite, on obtient $x = y + \lambda u \in F + \text{Vect}(u)$. Ainsi, l'espace $F + \text{Vect}(u)$ est fermé.

Solution de 7 : Centrale-Mines

A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \leq u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $u \in A$.

B est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n^p| \leq \varepsilon/2$$

et donc

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon$$

Ainsi $u \rightarrow 0$ et donc $u \in B$.

C est fermé. En effet, si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p , la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \leq \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p$. $v^p \in B$ et $v^p \rightarrow u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.

D est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p , il existe une infinité de n tels que $|u_n^p| \leq \varepsilon/2$ et donc tels que

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon$$

Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.

E n'est pas fermé. Notons δ^p , la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore. Posons alors

$$u^p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} \delta^k$$

qui est élément de E . La suite u^p converge car

$$\|u^{p+q} - u^p\|_\infty \leq \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^p} \rightarrow 0$$

et la limite u de cette suite n'est pas périodique car

$$u_0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} = 1$$

et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit (u^n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}.$$

La suite (u^n) est une suite d'éléments de F et une étude en norme $\|\cdot\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \rightarrow u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de F , la partie F n'est pas fermée.

Solution de 8 : Centrale

1. Sachant $(u_{n+1} - u_n)$ de limite nulle, pour $\varepsilon = (b-a)/2 > 0$, il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \implies |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+p+1} - u_{n+p}| \leq \varepsilon$$

Sachant (v_p) de limite $+\infty$, le terme $u_p - v_q$ tend vers $-\infty$ lorsque q tend vers $+\infty$ et il existe donc un rang q tel que $u_p - v_q \leq a$. Pour ces paramètres p et q , la suite de terme général $w_n = u_{n+p} - v_q$ vérifie les conditions requises.

2. Posons

$$E = \{u_n - v_p \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$$

La suite (u_n) étant de limite $+\infty$, la suite (w_n) l'est aussi et l'ensemble A des $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $w_n \leq a$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée. On peut alors introduire le plus grand entier N vérifiant $w_N \leq a$. On vérifie

$$w_{N+1} > a \quad \text{et} \quad w_{N+1} \leq w_N + \underbrace{|w_{N+1} - w_N|}_{\leq (b-a)/2} < b.$$

On a ainsi établi :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \implies \exists x \in E, x \in]a; b[$$

La partie E est donc dense dans $\mathbb{R}$.

3. Introduisons $(v_p) = (2p\pi)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et l'image de celle-ci par la fonction sinus est $S = \{\sin(u_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Cette partie est incluse dans le fermé $[-1; 1]$ et donc $\bar{S}$ aussi. Inversement, tout élément de $[-1; 1]$ est le sinus d'un angle θ et il existe une suite d'éléments de E de limite θ . Par continuité de la fonction sinus, il existe une suite d'éléments de S de limite $\sin(\theta)$. Au final,

$$\bar{S} = [-1; 1]$$

4. Introduisons $(v_p) = (p)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et l'image de celle-ci par la fonction $f : x \mapsto x - [x]$ est $F = \{u_n - [u_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$. Cette partie est incluse dans le fermé $[0; 1]$ et donc $\bar{F}$ aussi. Inversement, tout élément de $]0; 1[$ est limite d'une suite d'éléments de E . Les termes de cette suite appartiennent à $]0; 1[$ à partir d'un certain rang et sont donc invariants par f : ils appartiennent à F . Ainsi,

$$]0; 1[\subset \bar{F}$$

Enfin, $\bar{F}$ étant une partie fermée, on a aussi

$$[0; 1] \subset \bar{F}$$

puis l'égalité.

5. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n) = (u_n - [u_n])$ est

$$\text{Adh}(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, n \geq N\}}.$$

En effet, ℓ est une valeur d'adhérence de x si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $\|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

Par l'étude qui précède

$$\overline{\{x_n, n \geq N\}} = [0; 1]$$

et l'ensemble des valeurs d'adhérence de x est exactement $[0; 1]$.

Solution de 9 : X-ENS : Topologie matricielle

- L'adhérence des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il s'agit de la très classique propriété de densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Il suffit pour cela de trigonaliser une matrice (on peut) et de perturber les coefficients diagonaux en ajoutant des termes de la forme $\frac{\alpha}{k}$ pour obtenir des coefficients diagonaux tous distincts : on obtient alors une suite de matrices diagonalisables qui tend vers la matrice de départ.
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables.
En effet, si une matrice est trigonalisable, on construit comme dans $\mathbb{C}$ une suite de matrices diagonalisables dont c'est la limite.
Réciproquement, donnons-nous une suite $(A_p)_p$ de matrices réelles diagonalisables convergente vers A et montrons que A est trigonalisable.
Pour cela, on utilise l'indication facile à prouver (le sens indirect est immédiat car toute racine complexe est alors réelle, le sens direct s'obtient en minorant une forme factorisée de $P(z)$).
On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $|\text{Im } z|^n \leq |\chi_{A_p}(z)|$ et par continuité de $A \mapsto \chi_A$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\text{Im } z|^n \leq |\chi_A(z)|$ ce qui assure que A est trigonalisable.
- Pour l'intérieur, c'est plus délicat. L'exemple simple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

montre que la matrice nulle, diagonalisable, est limite d'une suite de matrices non diagonalisables, donc la matrice nulle n'est pas dans l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables. S'inspirant de cet exemple, on peut penser qu'une matrice diagonalisable ayant au moins une valeur propre double n'est pas intérieure à l'ensemble des matrices diagonalisables. Soit en effet M une telle matrice ; elle s'écrit

$$M = P D P^{-1}$$

avec P inversible et D diagonale, et où l'on peut supposer $D_{1,1} = D_{2,2} = \lambda$. Soit $T_p = D + \frac{1}{p} E_{1,2}$ (les coefficients de T_p sont ceux de D , sauf le coefficient $(1, 2)$). T_p n'est pas diagonalisable (le rang de $T_p - \lambda I_n$ est $n - m_\lambda + 1$ où m_λ est le

nombre d'apparitions de λ sur la diagonale, c'est-à-dire la multiplicité de λ . Donc la dimension de $\text{Ker}(T_p - \lambda I_n)$ est $m_\lambda - 1$, ce qui fait que T_p n'est pas diagonalisable). Comme

$$P T_p P^{-1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} P D P^{-1} = M$$

M est dans l'adhérence de l'ensemble des matrices non diagonalisables, elle n'est donc pas dans l'intérieur des matrices diagonalisables.

On conclut provisoirement que :

L'intérieur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables est inclus dans l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes

L'inclusion réciproque est le passage délicat. Soit (M_p) une suite de matrices convergeant vers une matrice M . On suppose que M a n valeurs propres distinctes. Montrons qu'alors, à partir d'un certain rang, M_p a elle aussi n valeurs propres distinctes. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M . Soit $\delta > 0$, et supposons que M_p n'ait pas de valeur propre dans le disque $D(\lambda_1, \delta)$. Le polynôme caractéristique de M_p s'écrit

$$\chi_p(X) = \prod_{i=1}^n (X - \pi_{i,p})$$

où les $\pi_{i,p}$ sont les valeurs propres de M_p , comptées avec leur multiplicité. On aurait, pour tout i , $|\pi_{i,p} - \lambda_1| \geq \delta$, donc

$$|\chi_p(\lambda_1)| \geq \delta^n$$

Or, par continuité du déterminant,

$$\chi_p(\lambda_1) = \det(\lambda_1 I_n - M_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \det(\lambda_1 I_n - M) = 0$$

Donc, à partir d'un certain rang,

$$|\chi_p(\lambda_1)| < \delta^n$$

ce qui permet de conclure que, pour tout $\delta > 0$, il existe un rang à partir duquel M_p a au moins une valeur propre dans le disque $D(\lambda_1, \delta)$. Idem pour les autres λ_i . Choisissons alors δ strictement inférieur à la moitié de la plus petite distance entre deux λ_i :

$$0 < \delta < \frac{1}{2} \min\{|\lambda_i - \lambda_j| ; i \neq j\}$$

A partir d'un certain rang, M_p a au moins une valeur propre dans chacun des $D(\lambda_i, \delta)$, or ces disques sont disjoints, donc M_p a au moins n valeurs propres distinctes, donc M_p est diagonalisable. Il n'existe donc pas de suite de matrices non diagonalisables qui converge vers M .

Donc M n'appartient pas à l'adhérence de l'ensemble des matrices non diagonalisables.

Donc M appartient à l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.

L'intérieur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes

Remarque : Il y a bien d'autres manières d'aborder cette question. Ici, on a évité de se poser des problèmes de continuité de l'application qui à une matrice associe son polynôme caractéristique, de « continuité » des racines d'un polynôme...

- Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le fait que l'ensemble des matrices diagonalisables ayant n valeurs propres distinctes est ouvert peut se faire plus facilement grâce à l'ordre. En effet, si $a_1 < \dots < a_n$ sont les n valeurs propres de A , on choisit b_k dans $]a_k, a_{k+1}[$ et on utilise la continuité de

$$A \longmapsto (P_A(b_1), \dots, P_A(b_{n-1})).$$

pour conclure.

- Si B est semblable à A alors A et B ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal. On a donc $\chi_A = \chi_B$ et aussi $\pi_A(B) = \pi_B(B) = O_n$.
Inversement, si $\pi_A(B) = O_n$ alors B est diagonalisable. En effet, π_A est simplement scindé puisqu'on suppose A est diagonalisable. Si de plus $\chi_A = \chi_B$ alors A et B ont les mêmes valeurs propres comptées avec multiplicité. Les matrices A et B sont donc diagonalisables semblables à une même matrice diagonale, elles sont semblables entre elles.
- L'application $\chi : M \mapsto \chi_M$ de $\mathcal{M}_n(C)$ vers $C_n[X]$ est continue.
En effet, les coefficients de χ_M sont des polynômes en les coefficients de M .
On en déduit que l'ensemble $\chi^{-1}(\{\chi_A\})$ est une partie fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue.
Aussi, l'application $\pi_A : M \mapsto \pi_A(M)$ de $\mathcal{M}_n(C)$ vers lui-même est continue par opérations sur les fonctions continues. On en déduit que l'ensemble $\pi_A^{-1}(\{O_n\})$ est fermée.
Par intersection, la classe de similitude de A qui peut se décrire comme $\chi^{-1}(\{\chi_A\}) \cap \pi_A^{-1}(\{O_n\})$ est fermée.
- La matrice $A \in \mathcal{M}_n(C)$ est assurément trigonalisable (son polynôme caractéristique est nécessairement scindé sur C).
Il existe donc au moins une matrice triangulaire supérieure dans sa classe de similitude.
- En notant $t_{i,j}$ le coefficient général de T , le coefficient général de $D_k^{-1}TD_k$ est $k^i t_{i,j} k^{-j} = t_{i,j} k^{i-j}$.
- Pour $i < j$,

$$t_{i,j} k^{i-j} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Pour $i = j$,

$$t_{i,j} k^{i-j} = t_{i,i} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} t_{i,i}$$

Pour $i > j$,

$$t_{i,j} k^{i-j} = 0 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc $D_k^{-1}TD_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} D = \text{diag}(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})$. Or les matrices $D_k^{-1}TD_k$ sont semblables à T donc à A . La suite $(D_k^{-1}TD_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ apparaît comme une suite convergente d'éléments du fermé qu'est la classe de similitude de A , sa limite D est donc aussi élément de cette classe de similitude.

Ainsi, il existe une matrice diagonale dans la classe de similitude de A : la matrice A est diagonalisable.

- Si A est diagonalisable dans C alors toute limite A_∞ d'une suite de la classe de similitude de A est semblable à A dans $\mathcal{M}_n(C)$. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(C)$ telle que $P^{-1}AP = A_\infty$. On a alors $AP = PA_\infty$.
En introduisant les parties réelles et imaginaires de P , on peut écrire $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'identité $AP = PA_\infty$ avec A et A_∞ réelles entraîne $AQ = QA_\infty$ et $AR = RA_\infty$.
Puisque la fonction polynôme $t \mapsto \det(Q + tR)$ n'est pas nulle (car non nulle en i), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P' = Q + tR \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et pour cette matrice $AP' = P'A_\infty$. Ainsi, les matrices A et A_∞ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Si A n'est pas diagonalisable dans C , il existe une valeur propre complexe λ pour laquelle $\text{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \neq \text{Ker}(A - \lambda I_2)$.
Pour $X_2 \in \text{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \setminus \text{Ker}(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$.
 - * Si $\lambda \in \mathbb{R}$, il suffit de reprendre la démonstration qui précède.
 - * Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on peut écrire $\lambda = a + ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.
Posons $X_3 = \bar{X}_1$ et $X_4 = \bar{X}_2$.
La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre car $\lambda \neq \bar{\lambda}$.
Introduisons ensuite $Y_1 = \text{Re}(X_1)$, $Y_2 = \text{Re}(X_2)$, $Y_3 = \text{Im}(X_1)$ et $Y_4 = \text{Im}(X_2)$.
Puisque $\text{Vect}_C(Y_1, \dots, Y_4) = \text{Vect}_C(X_1, \dots, X_4)$, la famille $(Y_1, \dots, Y_4)$ est libre et peut donc être complétée en une base.

On vérifie par le calcul $\begin{cases} AY_1 = aY_1 - bY_3 \\ AY_2 = aY_2 - bY_4 + Y_1 \\ AY_3 = aY_3 + bY_1 \\ AY_4 = bY_2 + aY_4 + Y_3 \end{cases}$ et on obtient que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à

la matrice

$$\begin{pmatrix} T & * \\ O & B \end{pmatrix}$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \text{diag}(p, 1, p, 1, \dots, 1)$, on obtient

$$P_p^{-1} T P_p \rightarrow \begin{pmatrix} T_\infty & \psi' \\ O & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

avec

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Or dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A_∞ est semblable à $\text{diag}(\lambda, \lambda, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}, B)$ qui n'est pas semblable à A pour des raisons de dimensions analogues à ce qui a déjà été vu.

Les matrices réelles A et A_∞ ne sont pas semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni a fortiori dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que la classe de similitude de A n'est pas fermée