

1 Remplacement de l'inégalité triangulaire

Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacée par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x) \leq 1$ est un convexe de E).

Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y .

2 Caractérisation des normes euclidiennes

Montrer qu'une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

3 X Existe-t-il des normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariantes par similitude ?

4 Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère les normes $N_1(P) = \sup_{t \in [0;1]} |P(t)|$ et $N_2(P) = \sup_{t \in [1;2]} |P(t)|$.

L'ensemble $\Omega = \{P \in E \mid P(0) \neq 0\}$ est-il ouvert pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

On pourra penser au théorème de Weierstrass.

5 Suites de Cauchy - Espaces complets

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, une suite u est dite **de Cauchy** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon.$$

Cela se traduit aussi par $u_p - u_q \xrightarrow[p, q \rightarrow +\infty]{} 0$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Lorsque la réciproque est vraie, on dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est **complet**.

2. Montrer que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet.

3. Montrer que $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), N_1)$ n'est pas complet.

On pourra introduire les fonctions définies par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \quad \text{pour } x \in [0,1] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

4. Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente à valeurs dans cet espace est convergente.

6 X Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Montrer que $F + G$ est fermé.

7 Centrale-Mines On munit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

$A = \{\text{suites croissantes}\}$

$B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$

$C = \{\text{suites convergentes}\}$

$D = \{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\}$

$E = \{\text{suites périodiques}\}$

$F = \{\text{suites terme général d'une série absolument convergente}\}.$

8 Centrale Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow +\infty$. Soit (v_p) une suite réelle telle que $v_p \rightarrow +\infty$.

1. On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $(w_n) = (u_{n+p} - v_q)$. Montrer que l'on peut choisir p et q de telle sorte que l'on ait $w_0 \leq a$ et $|w_{n+1} - w_n| \leq (b-a)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\{u_n - v_p, (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Déterminer l'adhérence de $\{\sin(u_n), n \in \mathbb{N}\}$.

4. Déterminer l'adhérence de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor, n \in \mathbb{N}\}$.

5. Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n - \lfloor u_n \rfloor)$?

9 X-ENS : Topologie matricielle

1. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour l'adhérence, on pourra vérifier que si P est un polynôme réel unitaire de degré n , alors il est scindé si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Im} z|^n \leq |P(z)|$.

10 X-ENS : Topologie des classes de similitudes On appelle classe de similitude d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices semblables à A .

1. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

(a) Montrer que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à A si, et seulement si,

$$\chi_A = \chi_B \quad \text{et} \quad \pi_A(B) = 0_n$$

(b) En déduire que la classe de similitude d'une matrice diagonalisable est une partie fermée.

2. Inversement, on suppose que la classe de similitude d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une partie fermée.

(a) Montrer que cette classe de similitude contient au moins une matrice triangulaire supérieure T .

(b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$. On introduit la matrice diagonale $D_k = \operatorname{diag}(k, k^2, \dots, k^n)$. Calculer $D_k T D_k^{-1}$.

(c) Établir que A est diagonalisable.

3. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est fermée ?