

Solution de 1 : X-ENS : exemple de tribus

1. On remarque que $A_I(X)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ dont la restriction à I appartient à X .

On a donc $A_I(\mathbb{N}^{(I)}) = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \in \mathcal{A}_I$. Si $X \subset \mathbb{N}^{(I)}$, alors, pour toute suite $a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, $a|_I \in X$ ou bien $a|_I \in \bar{X}$ (complémentaire de X dans $\mathbb{N}^{(I)}$). Donc $a \in A_I(X)$ ou bien $a \in A_I(\bar{X})$: $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est donc réunion disjointe de $A_I(X)$ et $A_I(\bar{X})$. Le complémentaire de $A_I(X)$ est donc $A_I(\bar{X}) \in \mathcal{A}_I$. Soit enfin $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{N}^{(I)}$. On a alors

$$A_I\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_I(X_n),$$

ce qui permet de dire que $\mathcal{A}_I$ est une tribu de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$.

2. ■ Si $A \in \mathcal{A}_I \cap \mathcal{A}_J$, alors A s'écrit $A = A_I(X) = A_J(Y)$ avec $X \subset \mathbb{N}^{(I)}$ et $Y \subset \mathbb{N}^{(J)}$. Notons X' l'ensemble des restrictions des suites de X à $I \cap J$. Si $a \in A$, alors $a|_{I \cap J} \in X'$ et $a \in A_{I \cap J}(X')$. Réciproquement, si $a \in A_{I \cap J}(X')$, il existe $x \in X$ tel que $x|_{I \cap J} = a|_{I \cap J}$. Toute suite presque nulle prolongeant x à $\mathbb{N}$ est dans $A_I(X) = A_J(Y)$. On peut choisir une telle suite coïncidant avec a sur J . Il y a donc une suite y de Y telle que $y = a|_J$. Ainsi $a \in A_J(Y) = A$. On a donc $A = A_{I \cap J}(X')$, ce qui montre que $\mathcal{A}_I \cap \mathcal{A}_J \subset \mathcal{A}_{I \cap J}$.
- Réciproquement, si $A \in \mathcal{A}_{I \cap J}$, il existe $X \subset \mathbb{N}^{(I \cap J)}$ tel que $A = A_{I \cap J}(X)$. Notons $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{Y}$) l'ensemble des restrictions des suites de A à I (à J). Si $a \in A$, alors $a|_I \in \tilde{X}$, donc $a \in A_I(\tilde{X})$. Réciproquement, si $a \in A_I(\tilde{X})$, il existe $x \in A$ tel que $a|_I = x|_I$. Alors $a|_{I \cap J} = x|_{I \cap J} \in X$ donc $a \in A_{I \cap J}(X) = A$. On a donc $A = A_I(\tilde{X})$ et $A = A_J(\tilde{Y})$ par symétrie. Ainsi $A \in \mathcal{A}_I \cap \mathcal{A}_J$.
- On conclut que $\mathcal{A}_I \cap \mathcal{A}_J = \mathcal{A}_{I \cap J}$.
3. La tribu $\mathcal{A}_{I \cup J}$ contient clairement $\mathcal{A}_I$ et $\mathcal{A}_J$. Il s'agit maintenant de démontrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu contenant $\mathcal{A}_I \cup \mathcal{A}_J$, alors elle contient aussi $\mathcal{A}_{I \cup J}$. On prend $A \in \mathcal{A}_{I \cup J}$ qui s'écrit donc $A = A_{I \cup J}(X)$ avec X une partie de $\mathbb{N}^{(I \cup J)}$. La partie X est dénombrable puisque $\mathbb{N}^{(I \cup J)}$ l'est. En effet, pour tout $I \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{(I)}$ est la réunion dénombrable des ensembles $\mathbb{N}_n^{(I)}$ des familles $(x_i)_{i \in I}$ telles que $x_i = 0$ si $i > n$ et chaque ensemble $\mathbb{N}_n^{(I)}$, non vide est dénombrable car il s'identifie à $\mathbb{N}^k$, où $k = |I \cap \llbracket 0, n \rrbracket|$. On peut alors remarquer que

$$A = \bigcup_{x \in X} A_{I \cup J}(\{x|_{I \cup J}\}) = \bigcup_{x \in X} A_I(\{x|_I\}) \cap A_J(\{x|_J\}) \in \mathcal{T},$$

puisque A s'exprime comme réunion ou intersection au plus dénombrable de parties de $\mathcal{A}_I \cup \mathcal{A}_J$.

Solution de 2 : Non dénombrabilité de l'univers

FGN 6 3.4

La réponse est non.

Sinon, considérer pour tout x , suite de 0 et de 1, $A_x = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (X_n = x_n) \in \mathcal{T}$.

Par continuité décroissante que $\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = x_k)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_x) = 0$ car $\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k) \leq \max(p, 1-p)^n$.

Comme les variables aléatoires sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, on a $\Omega = \bigcup_{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}} A_x$ est négligeable, ce qui est contradictoire.

Solution de 3 : Écart à l'indépendance

FGN 6 3.7 Avec Cauchy-Schwarz,

$$(\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))^2 = \text{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)^2 \leq \mathbb{V}(\mathbb{1}_A)\mathbb{V}(\mathbb{1}_B) = p(1-p)q(1-q)$$

où $p = \mathbb{P}(A)$ et $q = \mathbb{P}(B)$.

Reste à voir que $x \mapsto x(1-x)$ atteint un maximum $\frac{1}{4}$ en $x = \frac{1}{2}$.

Solution de 4 : Pile ou Face : longueur des premières séquences

1. On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le i^{e} lancer donne Pile, égale à 0 sinon. Comme d'habitude, la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
La variable aléatoire L_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Par probabilités totales, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1 = n) &= \mathbb{P}(L_1 = n, X_1 = 0) + \mathbb{P}(L_1 = n, X_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_n = 0, X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_n = 1, X_{n+1} = 0) \\ &= (1-p)^n p + p^n (1-p)\end{aligned}$$

Ce qui donne, l'espérance étant manifestement finie,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1) &= p(1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} + p(1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} n p^{n-1} \\ &= p(1-p) \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2} \right) \\ &= \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p}\end{aligned}$$

On est rassuré de voir que cette espérance est symétrique en p et $1-p$, qu'elle est minimale quand $p = 1/2$ (étudier les variations de $x + 1/x$ quand $x > 0$), qu'elle tend vers l'infini quand p tend vers 0 ou 1...
Maintenant,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1(L_1 - 1)) &= p(1-p)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} + p^2(1-p) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p^{n-2} \\ &= p(1-p) \left((1-p) \frac{2}{p^3} + p \frac{2}{(1-p)^3} \right) \\ &= 2 \left(\left(\frac{1-p}{p} \right)^2 + \left(\frac{p}{1-p} \right)^2 \right)\end{aligned}$$

et donc, $\mathbb{V}(L_1) = 2 \left(\left(\frac{1-p}{p} \right)^2 + \left(\frac{p}{1-p} \right)^2 \right) + \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p} - \left(\frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p} \right)^2$ ou, en simplifiant un peu,

$$\mathbb{V}(L_1) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 + \left(\frac{p}{1-p} \right)^2 + \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p} - 2$$

2. Le plus simple est de calculer la loi conjointe de (L_1, L_2) , i.e. de calculer

$$\mathbb{P}(L_1 = n, L_2 = m)$$

pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}_*^2$, puis d'utiliser les probabilités totales. On peut aussi utiliser le caractère sans mémoire de la loi géométrique.

Si on ne veut rien utiliser, on peut, par probabilités totales, la variable L_2 étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_2 = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = 0, L_1 = n, L_2 = m) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = 1, L_1 = n, L_2 = m) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_n = 0, X_{n+1} = \dots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_n = 1, X_{n+1} = \dots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n p^m (1-p) + \sum_{n=1}^{+\infty} p^n (1-p)^m p \\ &= (1-p)^2 p^{m-1} + p^2 (1-p)^{m-1}\end{aligned}$$

Donc, facilement,

$$\mathbb{E}(L_2) = 2$$

Surprenant ? nullement si $p = 1/2$ (il est clair que dans ce cas les lois de L_1 et de L_2 sont les mêmes). Si p est proche de 0 ou 1 : avec une probabilité forte, la première séquence est longue, et la deuxième courte. Et avec une

probabilité faible, la première séquence est courte, la deuxième longue. On peut donc accepter que cela se compense en moyenne.

De

$$\mathbb{E}(L_2(L_2 - 1)) = p(1-p)^2 \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1)p^{m-2} + p^2(1-p) \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1)(1-p)^{m-2}$$

on déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(L_2) &= p(1-p)^2 \frac{2}{(1-p)^3} + p^2(1-p) \frac{2}{p^3} + 2 - 4 \\ &= 2 \left(\frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - 1 \right) \end{aligned}$$

3. Montrer que $\mathbb{V}(L_1) \geq \mathbb{V}(L_2)$ revient alors à montrer que, si $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2} + x^2 \geq x + \frac{1}{x}$$

ou encore, en posant $y = x + 1/x$, que

$$y^2 - 2 \geq y$$

si $y \geq 2$, ce qui est vrai.

4. Par transfert, on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_1 L_2) &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_*^2} mn P(L_1 = n, L_2 = m) \\ &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_*^2} mn (p^n(1-p)^m p + (1-p)^n p^m (1-p)) \\ &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_*^2} mn (p^{n+1}(1-p)^m + (1-p)^{n+1} p^m) \\ &= (1-p) \frac{1}{p^2} p^2 \frac{1}{(1-p)^2} + p \frac{1}{(1-p)^2} (1-p)^2 \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

(suites doubles produits de deux suites sommables...). Donc, après simplifications,

$$\text{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} - 2 \left(\frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p} \right)$$

que l'on arrange un peu, pour vérifier :

$$\text{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1-2p}{1-p} + \frac{2p-1}{p} = -\frac{(1-2p)^2}{p(1-p)}$$

la covariance est nulle si $p = 1/2$, attendu car L_1 et L_2 sont intuitivement indépendantes dans ce cas. Elle est en général négative, ce qui est aussi assez intuitif (si la première séquence est particulièrement longue, c'est en général qu'elle est obtenue avec le côté de la pièce qui a le plus de chance de se montrer, la deuxième séquence aura tendance à être courte...).

5. Calculons enfin une probabilité conditionnelle :

$$\frac{P(L_2 = n, L_1 = m)}{P(L_1 = m)} = \frac{p^{m+1}(1-p)^n + (1-p)^{m+1} p^n}{p^m(1-p) + (1-p)^m p}$$

que l'on peut légèrement simplifier, et qui tend, quand m tend vers $+\infty$, vers $p(1-p)^{n-1}$ si $p > 1/2$, vers $(1-p)p^{n-1}$ si $p < 1/2$, les deux si $p = 1/2$...de nouveau, ce n'est pas complètement contre-intuitif...

Solution de 5 : Fonction de répartition

admats 655

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$. On a $(X \leq x) \subset (X \leq y)$ donc, par croissance des probabilités,

$$F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F_X(y).$$

La fonction F_X est croissante.

Puisqu'elle est croissante, la fonction F_X admet assurément des limites en $-\infty$ et en $+\infty$. On peut calculer celles-ci par des suites

$$F_X(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lim_{+\infty} F_X \quad \text{et} \quad F_X(-n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lim_{-\infty} F_X.$$

Par continuité croissante,

$$F_X(n) = P(X \leq n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \leq n)\right) = P(\Omega) = 1$$

Par continuité décroissante,

$$F_X(-n) = P(X \leq -n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \leq -n)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\emptyset) = 0$$

2. Puisqu'elle est croissante, la fonction F_X admet des limites à droite et à gauche en tout $x \in \mathbb{R}$. On peut calculer celles-ci par des suites

$$F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow x^+} F_X(t) \quad \text{et} \quad F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t).$$

Par continuité décroissante,

$$F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = P\left(X \leq x + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(X \leq x + \frac{1}{n}\right)\right) = P(X \leq x)$$

Par continuité croissante,

$$F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = P\left(X \leq x - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(X \leq x - \frac{1}{n}\right)\right) = P(X < x)$$

3. Par définition de la fonction de répartition, la loi de X suffit à déterminer sa fonction de répartition. Inversement, par ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = \lim_{t \rightarrow x^+} F_X(t) - \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t).$$

Ainsi, la fonction de répartition de X suffit à déterminer la loi de X .

Solution de 6 : Très classique : lemme de Borel-Cantelli

- Respectivement, on prendra $B = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$, $B = \bigcap_{p=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$, $B = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$, encore le même pour finir ! Les réunions sont croissantes, les intersections sont décroissantes, ce qui permet d'indexer à partir de 1, 2 ou plus au lieu de 0.
- $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable et par intersection dénombrable.
- ω appartient à une infinité d'événements A_n .
- Elle est décroissante.
- Par continuité décroissante,

$$P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n).$$

Mais

$$P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n)$$

Et la suite des restes d'une série convergente converge vers 0, ce qui permet de conclure.

- (a) (et ça implique (d)).
- (a) Il suffit de noter que, par convexité, $1 - x \leq e^{-x}$ non seulement pour tout $x \in [0, 1]$, mais aussi pour tout réel x .
- (b) Déjà, par continuité décroissante, $P\left(\bigcap_{n=p}^q \overline{A_n}\right) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$.

Or, par indépendance et la question précédente, $P\left(\bigcap_{n=p}^q \overline{A_n}\right) = \prod_{n=p}^q P(\overline{A_n}) \leq \exp\left(-\sum_{n=p}^q P(A_n)\right)$, d'où le résultat en faisant $q \rightarrow +\infty$ et en utilisant la divergence de la série à termes positifs.

- (c) Donc $\bigcup_{p=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$ est négligeable lui aussi en tant que réunion dénombrable d'événements négligeables, et on conclut en passant au complémentaire.

8. Soit A_n l'évènement : « le singe frappe J, T, K, U aux frappes $4n+1, 4n+2, 4n+3, 4n+4$. Les A_n sont indépendants, et $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{26^4}$, donc $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, il suffit alors d'appliquer Borel-Cantelli « difficile » : presque sûrement, une issue appartient à une infinité de A_n . Ou encore : presque sûrement, une infinité de A_n se produisent. A fortiori, on a le résultat (mais on peut préciser ce « a fortiori » en écrivant ce qu'on veut comme réunion de 4 évènements du type A_n).

Souvent, on « résout » le « paradoxe » (qui n'en est d'ailleurs pas vraiment un) en cherchant l'espérance du nombre de frappes pour obtenir le premier A_n : 26^4 frappes (voir espérance d'une loi géométrique), ce qui est beaucoup. Pour le poème « Demain dès l'aube... », c'est un peu plus long : ce texte comporte très approximativement 500 lettres. L'espérance est alors 26^{500} . Pas loin de $26^{498}/3$ pages seront utilisées (en moyenne) avant d'avoir ce poème. Ce qui ferait plus de $10^{-3} \times 26^{498}$ kg de papier. C'est beaucoup. Sans compter qu'il faudrait garder un peu de matière dans l'univers pour l'encre, la nourriture du dactylographe...

9. (a) La probabilité cherchée est $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

(b) L'égalité aux trois tables après $2n$ parties a une probabilité équivalente à $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^3 = \frac{1}{(\pi n)^{3/2}}$, qui est le terme général d'une série convergente. Il n'y a donc qu'à appliquer Borel-Cantelli « facile ».

Solution de 7 : Fonction caractéristique

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire e^{itX} est bornée, elle admet donc une espérance et cela assure la définition $\varphi_X(t)$. De plus, la formule de transfert donne

$$\varphi_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(t) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_{-n}(t) \text{ avec } u_n(t) = e^{int} \mathbb{P}(X = n).$$

Les fonctions u_n sont continues et les séries de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_{-n}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ car

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t)| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_{-n}(t)| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = -n) = \mathbb{P}(n \in \mathbb{Z}_-) < +\infty$$

On en déduit que la fonction φ_X est continue.

Aussi, cette fonction est 2π -périodique car chacune des fonctions u_n l'est.

2. Supposons que X admette une espérance :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \mathbb{P}(X = n) < +\infty.$$

Les fonctions u_n introduites au-dessus sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$u'_n : t \mapsto in e^{int} \mathbb{P}(X = n).$$

et les séries de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u'_{-n}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ car

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in \mathbb{R}} |u'_n(t)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \mathbb{P}(X = n) \leq \mathbb{E}(X) < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in \mathbb{R}} |u'_{-n}(t)| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |n| \mathbb{P}(X = -n) \leq \mathbb{E}(X) < +\infty$$

car X est d'espérance finie.

On en déduit que φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\varphi'_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in e^{int} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(iX e^{itX}).$$

En particulier, $\mathbb{E}(X) = -i\varphi'_X(0)$.

De façon analogue, on obtient que si X est de variance finie, φ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(X^2) = -\varphi''_X(0)$. Par la formule de Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = -(\varphi'_X(0))^2 - \varphi''_X(0)$$

3. Si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, on obtient par sommation géométrique de raison $q = (1-p)e^{it}$ avec $|q| < 1$,

$$\varphi_X(I) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{int} (1-p)^{n-1} p = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

On a alors

$$\varphi'_X(t) = \frac{ipe^{it}}{1-(1-p)e^{it}} + \frac{ip(1-p)e^{2it}}{(1-(1-p)e^{it})^2}$$

et

$$\varphi''_X(t) = \frac{-pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}} - \frac{3p(1-p)e^{2it}}{(1-(1-p)e^{it})^2} - \frac{2p(1-p)^2e^{2it}}{(1-(1-p)e^{it})^3}.$$

On en tire

$$\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p}$$

et

$$\mathbb{V}(X) = -\frac{1}{p^2} + 1 + \frac{3(1-p)}{p} + \frac{2(1-p)^2}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{q}{p^2}.$$

Solution de 8 : Théorème de Beppo Levi (limite d'espérance par convergence monotone)

1. Par croissance, pour tout entier j ,

$$(X \geq j) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n \geq j)$$

(pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))$ est une suite croissante d'entiers naturels, sa limite est $\geq j$ si et seulement si il y a un rang à partir duquel elle est $\geq j$). Il suffit alors d'utiliser la continuité croissante. Remarquons que par ce moyen on peut conclure que pour tout j , $(X \geq j)$ est un événement, il n'est alors pas très dur de montrer que X est une variable aléatoire.

2. Or, par inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(X_n \geq j) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{j}$$

La suite $(\mathbb{E}(X_n))$ est convergente, elle est croissante, elle est donc majorée par sa limite ℓ . On obtient, par passage des inégalités larges à la limite,

$$\mathbb{P}(X \geq j) \leq \frac{\ell}{j}$$

or

$$(X = +\infty) = \bigcap_{j=1}^{+\infty} (X \geq j)$$

et la continuité décroissante cette fois nous donne

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$$

3. Soit $\phi_j : t \mapsto \begin{cases} \mathbb{P}(X_n \geq j) & \text{si } t = n \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{P}(X \geq j) & \text{sinon.} \end{cases}$

On applique le théorème de la double limite :

H1 Pour tout $j \geq 1$, $\phi_j(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \geq j)$.

H2 On a $N_\infty(\phi_j) = \mathbb{P}(X \geq j)$. Pour tout N ,

$$\sum_{j=1}^N \mathbb{P}(X_n \geq j) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N \mathbb{P}(X \geq j)$$

Mais le membre de gauche est majoré pour tout n par $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq j)$, donc par ℓ . Donc on a

$$\forall N \geq 1, \sum_{j=1}^N \mathbb{P}(X \geq j) \leq \ell$$

donc $\sum_{j=1}^{+\infty} N_\infty(\phi_j) \leq \ell < +\infty$ et $\sum_j \phi_j$ converge uniformément car normalement sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de la double limite s'applique : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi_j(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq j) = \mathbb{E}(X)$.

Solution de 9 : Très classique : Identité de Wald

Avec les fonctions génératrices, si $|t| < 1$,

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k, N = n) \right) t^k && \text{formule des probabilités totales} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{\ell=1}^n X_\ell = k \right) t^k \right) && \text{Fubini avec sommabilité à justifier} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{\sum_{\ell=1}^n X_\ell}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) (G_{X_1}(t))^n && \text{par indépendance} \\ &= G_N \circ G_{X_1}(t), \end{aligned}$$

la sommabilité se justifiant par le fait que $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k, N = n) |t|^k = G_Y(|t|) < +\infty$.

Il reste à dériver et évaluer en 1 :

$$\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1) = G'_{X_1}(1) G'_N(G_{X_1}(1)) = \mathbb{E}(X_1) G'_N(1) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1).$$

Pour un calcul direct, on peut travailler directement dans $[0, +\infty]$ et utiliser Fubini :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k, N = n) \right) k && \text{formule des probabilités totales} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{\ell=1}^n X_\ell = k, N = n \right) k \right) && \text{Fubini positif} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{\ell=1}^n X_\ell = k \right) k \right) && N \text{ indépendant des } X_\ell \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^n X_\ell \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) n \mathbb{E}(X_1) && \text{par linéarité et les } X_\ell \text{ de même loi} \\ &= \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1). \end{aligned}$$

(On redécouvre à chaque fois une formule classique appelée formule de l'espérance totale, mais malheureusement hors-programme.)

Remarque : On aurait aussi pu écrire $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} X_\ell \mathbb{1}_{(\ell \leq N)} \right)$ mais pour intervertir l'espérance et la série, on a besoin d'un théorème : celui de Beppo Levi (convergence monotone).

Comme vu dans l'exercice 3, la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{\ell=1}^n X_\ell \mathbb{1}_{(\ell \leq N)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite croissante de variables aléatoires L^1 à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=1}^n X_\ell \mathbb{1}_{(\ell \leq N)} \right) = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(X_\ell \mathbb{1}_{(\ell \leq N)}) = \mathbb{E}(X_1) \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(\ell \leq N)}) \\ &= \mathbb{E}(X_1) \sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}(\ell \leq N) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_1) \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N \geq \ell) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N) < +\infty \end{aligned}$$

par indépendance et lemme des coalitions.

On peut alors écrire $\mathbb{E}(Y) = \lim \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N)$.

Solution de 10 : Très classique : inégalité de Chernoff

FGN 6 4.2

1. Convexité de $\exp$: comme $\lambda X \in [-\lambda, \lambda]$ il s'écrit comme barycentre à coefficients positifs

$$\lambda X = \underbrace{\frac{1-X}{2}}_{\geq 0}(-\lambda) + \underbrace{\frac{1+X}{2}}_{\geq 0}\lambda$$

La croissance de l'espérance conclut.

puis utilisation du DSE de $\exp$ en remarquant que pour tout n , $(2n)! \geq 2^n n!$, ou étude de fonction pour montrer que

$$\exp \lambda \leq \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} \right).$$

2. Inégalité de Markov en remarquant que $(S_n \geq a) = (e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda a})$.

$$\text{L'indépendance des } X_i \text{ conduit à } \mathbb{P}(S_n \geq a) \leq \frac{(\mathbb{E}(e^{\lambda X}))^n}{e^{\lambda a}} \leq e^{n \frac{\lambda^2}{2} - \lambda a}.$$

On conclut en minimisant $\lambda \mapsto n \frac{\lambda^2}{2} - \lambda a$.

Puis on applique le résultats aux $-X_n$ pour avoir la majoration de $\mathbb{P}(S_n \leq -a)$, puis enfin celle de

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) = \mathbb{P}(S_n \geq a) + \mathbb{P}(S_n \leq -a).$$

Solution de 11 : X : inégalité de Tchebychev - Cantelli

FGN 6 4.5

1. Posons $Y = X - \mathbb{E}(X) - \lambda$. On cherche à majorer $\mathbb{P}(Y \geq 0)$ sachant que $\mathbb{E}(Y) = -\lambda < 0$.

On a $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(Y^2) - \lambda^2$ si bien que l'inégalité à démontrer s'écrit

$$\mathbb{P}(Y \geq 0) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\mathbb{E}(Y^2)} = \frac{\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} = 1 - \frac{\mathbb{E}(Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$$

ce qui équivaut à $\mathbb{E}(Y)^2 \leq \mathbb{E}(Y^2) \mathbb{P}(Y < 0)$.

On pense donc naturellement à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui donne

$$\mathbb{E}(Y^2) \mathbb{P}(Y < 0) = \mathbb{E}(Y)^2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(Y < 0)}^2) \geq \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{(Y < 0)})^2$$

On a $Y \mathbb{1}_{(Y < 0)} \leq Y$ car, si Y est positive, le premier membre est nul, tandis que le second est positif.

Par croissance de l'espérance on a $\mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{(Y < 0)}) \leq \mathbb{E}(Y) \leq 0$ et, en élevant au carré,

$$\mathbb{E}(Y)^2 \leq \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{(Y < 0)})^2 \leq \mathbb{E}(Y^2) \mathbb{P}(Y < 0)$$

ce qui est le résultat souhaité.

2. Regardons la loi de N . Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ on a, par indépendance des X_i ,

$$\mathbb{P}(N = \ell) = \mathbb{P}(X_1 > 1, \dots, X_{\ell-1} > 1, X_\ell \leq 1) = \mathbb{P}(X_\ell \leq 1) \prod_{k=1}^{\ell-1} \mathbb{P}(X_k > 1)$$

et, en utilisant la question précédente, on a donc

$$\mathbb{P}(N = \ell) \leq \prod_{k=1}^{\ell-1} \frac{\mathbb{V}(X_k)}{\mathbb{V}(X_k) + 1} \leq \frac{1}{2^{\ell-1}}$$

Soit $a \in [0, \ln 2[$. Par le théorème de transfert on a

$$\mathbb{E}(e^{aN}) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = \ell) e^{\ell a} \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{e^{\ell a}}{2^{\ell-1}} = 2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{e^a}{2} \right)^\ell < +\infty,$$

car la série géométrique est convergente puisque $e^a < 2$. Ainsi e^{aN} est d'espérance finie.

Solution de 12 : Entropie d'une variable aléatoire

ddmaths 655

1. Pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a $-p(x)\log(p(x)) \geq 0$ car $p(x) \leq 1$. On en déduit $H(X) \in \mathbb{R}_+$.

Si $H(X) = 0$ alors, par somme nulle de positifs, on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x)\log(p(x)) = 0$$

et donc

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x) = 0 \text{ ou } p(x) = 1$$

Sachant que

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = P(X \in \mathcal{X}) = 1$$

on peut affirmer qu'il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $p(x) = P(X = x) = 1$. La variable X est alors presque sûrement constante.

2. Par définition

$$H(X, Y) = - \sum_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y) \log(P(X = x, Y = y)).$$

Or les variables X et Y étant indépendantes

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

puis

$$H(X, Y) = - \sum_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} P(X = x)P(Y = y)(\log(P(X = x)) + \log(P(Y = y))).$$

On sépare la somme en deux et l'on somme tantôt d'abord en x , tantôt d'abord en y et l'on obtient

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y)$$

car

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(Y = y) = 1.$$

3. On sait

$$P(X = x | Y = y) = P(X = x, Y = y) / P(Y = y)$$

donc

$$P(Y = y)H(X | Y = y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x, Y = y) \times (\log(P(X = x, Y = y)) - \log(P(Y = y))).$$

On sépare la somme en deux et l'on somme le résultat sur $y \in \mathcal{Y}$ pour obtenir

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} P(Y = y)H(X | Y = y) = H(X, Y) + \sum_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y) \log(P(Y = y))$$

Or

$$\begin{aligned} & \sum_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y) \log(P(Y = y)) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x, Y = y) \log(P(Y = y)) \end{aligned}$$

avec

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x, Y = y) = P(Y = y)$$

donc

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} P(Y = y)H(X | Y = y) = H(X, Y) - H(Y)$$

Solution de 13 : Convergence en probabilité d'une suite récurrente

FGN 6 4.43

1. On a $\mathbb{E}(T_0) = 0$ et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n) + \tau + \mathbb{E}(\sin(2\pi(t_n - T_n)))$$

On développe le sinus en $\sin(2\pi t_n)\cos(2\pi T_n) - \sin(2\pi T_n)\cos(2\pi t_n)$. Or T_n est une fonction de $t_0, \dots, t_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ donc, par le lemme des coalitions, t_n et T_n sont indépendantes. Il en est de même des variables aléatoires $\sin(2\pi t_n)$ et $\cos(2\pi T_n)$ d'une part et $\sin(2\pi T_n)\cos(2\pi t_n)$ d'autre part. On a donc

$$\mathbb{E}(\sin(2\pi(t_n - T_n))) = \mathbb{E}(\sin(2\pi t_n))\mathbb{E}(\cos(2\pi T_n)) - \mathbb{E}(\sin(2\pi T_n))\mathbb{E}(\cos(2\pi t_n))$$

On calcule les espérances simultanément en utilisant l'exponentielle et la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(e^{2i\pi t_n}) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2ik\pi/q} = \frac{1 - e^{2ip\pi}}{q(1 - e^{2ik\pi/q})} = 0$$

On a donc $\mathbb{E}(\sin(2\pi t_n)) = \mathbb{E}(\cos(2\pi t_n)) = 0$ et $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n) + \tau$. Par conséquent $\mathbb{E}(T_n) = n\tau$ pour tout n .

2. On va calculer la variance de J_n et appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour cela on commence par calculer $\mathbb{E}(T_n^2)$. Cette espérance est nulle pour $n = 0$, et en développant le carré on obtient

$$\mathbb{E}(T_{n+1}^2) = \mathbb{E}(T_n^2) + \tau^2 + \mathbb{E}(\sin^2(2\pi(t_n - T_n))) + 2\tau\mathbb{E}(T_n) + 2\mathbb{E}(T_n \sin(2\pi(t_n - T_n)))$$

En développant le sinus on voit que $\mathbb{E}(T_n \sin(2\pi(t_n - T_n))) = 0$. Il reste à calculer l'espérance du sinus au carré. Pour cela on le linéarise et

$$\mathbb{E}(\sin^2(2\pi(t_n - T_n))) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}(\cos(4\pi(t_n - T_n))) = \frac{1}{2}$$

car les espérances de $\cos(4\pi t_n)$ et $\sin(4\pi t_n)$ sont encore nulles. On a donc

$$\mathbb{E}(T_{n+1}^2) = \mathbb{E}(T_n^2) + \tau^2 + \frac{1}{2} + 2n\tau^2$$

En sommant cette égalité entre les rangs 0 et $n-1$, on obtient

$$\mathbb{E}(T_n^2) = n\left(\tau^2 + \frac{1}{2}\right) + \tau^2 n(n-1) = \frac{n}{2} + n^2\tau^2$$

et donc $\mathbb{V}(T_n) = \frac{n}{2}$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - \tau\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| > \varepsilon n) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\varepsilon n)^2} = \frac{1}{2\varepsilon^2 n}$$

ce qui donne le résultat demandé avec $\lambda = \tau$.

Solution de 14 : Convergence en probabilité dans un jeu de pile ou face

FGN 6 4.44

Nous faisons l'hypothèse (sous-entendue dans l'énoncé) que les tirages sont indépendants et que la pièce est équilibrée. On note X_n le résultat du n -ième tirage (1 pour pile, 0 pour face). Les variables aléatoires X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

1. Examinons la loi de e_n . Clairement, $\mathbb{P}(e_1 = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(e_1 = 0)$. Supposons $n \geq 2$. Si on se donne $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{0, 1\}^{n-1}$,

$$\mathbb{P}\left(e_n = 1 \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k = x_k)\right) = \mathbb{P}\left(e_n = 0 \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k = x_k)\right) = \frac{1}{2}$$

En effet, connaissant les résultats des $n-1$ précédents tirages, la probabilité de changer (resp. conserver) la parité du nombre de piles est $\frac{1}{2}$. On en déduit par la formule des probabilités totales que $\mathbb{P}(e_n = 1) = \mathbb{P}(e_n = 0) = \frac{1}{2}$ et que e_n est indépendante de $(X_1, \dots, X_{n-1})$. Comme $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une fonction de $(X_1, \dots, X_{n-1})$, le lemme des coalitions assure que e_n est indépendante de $(e_1, \dots, e_{n-1})$. Il s'ensuit que $e_1, \dots, e_n$ sont indépendantes car de proche en proche,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(e_1 = x_1, \dots, e_n = x_n) &= \mathbb{P}(e_1 = x_1, \dots, e_{n-1} = x_{n-1})\mathbb{P}(e_n = x_n) \\ &\vdots \\ &= \mathbb{P}(e_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(e_{n-1} = x_{n-1})\mathbb{P}(e_n = x_n) \end{aligned}$$

On conclut que $(e_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables indépendantes de même loi (loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$) à variance finie : la loi faible des grands nombres assure que la suite $\frac{e_1 + \dots + e_n}{n}$ converge en probabilité vers $\ell = \frac{1}{2}$.

2. On pose

$$T_n = \frac{e_1 e_2 + \dots + e_{n-1} e_n + e_n e_{n+1}}{n}$$

La variable aléatoire T_n possède une espérance constante qui vaut $\frac{1}{4}$. En effet, regardons la loi de $e_n e_{n+1}$ en conditionnant selon la valeur de e_{n-1} ($n \geq 2$). Si $e_{n-1} = 1$, pour avoir $e_n e_{n+1} = 1$, il faut $X_n = X_{n+1} = 0$:

$$\mathbb{P}(e_n e_{n+1} = 1 \mid e_{n-1} = 1) = \frac{1}{4}$$

Si $e_{n-1} = 0$, pour avoir $e_n e_{n+1} = 1$, il faut $X_n = 1$ et $X_{n+1} = 0$:

$$\mathbb{P}(e_n e_{n+1} = 1 \mid e_{n-1} = 0) = \frac{1}{4}$$

La formule des probabilités totales donne $\mathbb{P}(e_n e_{n+1} = 1) = \frac{1}{4}$. La variable $e_n e_{n+1}$ est donc une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$ (même pour $n = 1$). La moyenne T_n a aussi une espérance égale à $\frac{1}{4}$. Comme les $e_n e_{n+1}$ ne sont pas indépendants, on ne peut pas appliquer directement la loi faible des grands nombres. Nous allons appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff. Il nous faut donc calculer la variance de T_n . Si $Y_1, \dots, Y_n$ possèdent un moment d'ordre 2, on a

$$\mathbb{V}(Y_1 + \dots + Y_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(Y_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$$

On a $\mathbb{V}(T_n) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n e_i e_{i+1}\right)$. La variable de Bernoulli $e_i e_{i+1}$ a pour variance $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. Si $i+1 < j$, $e_i e_{i+1}$ et $e_j e_{j+1}$ sont indépendantes par le lemme des coalitions et leur covariance est nulle. Il reste donc

$$\mathbb{V}(T_n) = \frac{3}{16n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-2} \text{Cov}(e_i e_{i+1}, e_{i+1} e_{i+2})$$

or la covariance de deux variables est inférieure au produit de leur écart type qui vaut ici $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D'où la majoration

$\mathbb{V}(T_n) \leq \frac{3}{16n} + (n-2) \frac{6}{16n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on a, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|T_n - \frac{1}{4}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a bien le résultat recherché avec $\ell' = \frac{1}{4}$.

Solution de 15 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

FGN 6 5.13

- Comme les suites (a_n) et (b_n) sont à valeurs dans $[0, 1]$, les séries entières qui définissent A et B ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Pour $n \geq 1$, on note $A_n = (S_n = 0)$ et B_n l'événement « le premier retour à l'origine se fait à l'instant n ». Pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(A_n \mid B_k) = \mathbb{P}(X_{k+1} + \dots + X_n = 0 \mid B_k)$$

Les événements $B_k = (S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0)$ et $(X_{k+1} + \dots + X_n = 0)$ sont indépendants, par application du lemme des coalitions, car $(S_1, \dots, S_{k-1})$ est une fonction de $(X_1, \dots, X_{k-1})$ et les variables X_i sont indépendantes. On en déduit que

$$\mathbb{P}(A_n \mid B_k) = \mathbb{P}(X_{k+1} + \dots + X_n = 0) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{n-k} = 0) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0)$$

les dernières égalités étant justifiées par le fait que les X_i sont indépendantes de même loi, si bien que $(X_{k+1}, \dots, X_n)$ a la même loi que $(X_1, \dots, X_{n-k})$. Comme A_n est la réunion disjointe des B_k pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$a_n = \mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_n \cap B_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_n \mid B_k) \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=1}^n a_{n-k} b_k$$

Si on pose $b_0 = 0$, on reconnaît pour $n \geq 1$, le coefficient du produit de Cauchy des séries entières A et B, de rayon supérieur ou égal à 1. Nous savons qu'alors, pour $s \in [0, 1[$,

$$A(s)B(s) = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s^n = A(s) - 1$$

car $a_0 = 1$ (puisque $S_0 = 0$), ce qui donne la relation demandée.

2. On a $a_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, A_n est la réunion disjointe des événements $(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n)$ avec les $\varepsilon_i = \pm 1$ de somme nulle. L'événement est vide si n est impair, puisque S_n a toujours la parité de n . On a donc $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour a_{2n} , la probabilité de chaque $(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_{2n} = \varepsilon_{2n})$ est $p^n q^n$, puisque les X_k sont indépendantes, et on a donc $a_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$, puisqu'il y a $\binom{2n}{n}$ manières de choisir les n signes égaux à 1 parmi les $2n$. Par ailleurs, la série du binôme de Newton donne, pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $s \in [0, 1[$, et donc $4pq s^2 \in [0, 1[$, on a

$$A(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n s^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-4pq s^2}}$$

Si $s \in [0, 1[$, on a $A(s) > 0$ et $B(s) = \frac{A(s)-1}{A(s)} = 1 - \sqrt{1-4pq s^2}$.

3. Si la marche aléatoire repasse à l'origine, c'est-à-dire s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $S_m = 0$, alors l'un des événements B_n pour $n \leq m$ est réalisé.

L'inclusion inverse étant évidente, l'événement « il y a retour à l'origine » est la réunion disjointe des événements B_n et, par σ -additivité, sa probabilité est $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B(1)$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n s^n$ est normalement convergente sur $[0, 1]$ et en particulier continue.

On peut passer à la limite dans l'expression trouvée à la question précédente, ce qui donne

$$B(1) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{1-4p+4p^2} = 1 - \sqrt{(1-2p)^2} = 1 - |p-q|$$

4. Si $p = q = \frac{1}{2}$, il y a retour à l'origine presque sûrement, puisque la probabilité trouvée à la question précédente vaut 1. On définit la variable aléatoire T en posant

$$T = \min \{k \geq 1, S_k = 0\}$$

avec $T = +\infty$ si $S_k \neq 0$ pour tout k .

Par construction, T est une variable aléatoire qui est le temps d'attente du premier retour à l'origine. Comme $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$, T est à support dans $\mathbb{N}$ et son espérance, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, vaut

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n b_n$$

La fonction B est la fonction génératrice de T (ou plus exactement celle de $T \mathbb{1}_{\{T < +\infty\}}$ qui possède la même espérance).

Or, nous savons que T est d'espérance finie si, et seulement si, B est dérivable en 1.

D'après ce qui précède on a pour $s \in [0, 1[$, $B(s) = 1 - \sqrt{1-s^2}$, et cette fonction n'est pas dérivable en 1.

On conclut que $\mathbb{E}(T) = +\infty$: pour une marche symétrique, il y a retour presque sûr à l'origine, mais celui-ci se fait avec un temps moyen infini.

Solution de 16 : Convergence presque sûre et convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires

1. Notons A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X(\omega)$. Alors

$$\omega \in A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$A = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon).$$

Mais ce n'est pas une intersection dénombrable d'événements.

On peut réécrire la définition de la convergence

$$\omega \in A \iff \forall p \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{p+1}$$

(se vérifie facilement par double implication). On a alors

$$A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left(|X_n - X| \leq \frac{1}{p+1} \right)$$

qui est une intersection dénombrable d'unions dénombrables d'intersections dénombrables d'événements, donc est un bien un événement : $A \in \mathcal{A}$.

2. On suppose $\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = 1$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(A) = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\left(\bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \right)_N$ est une suite croissante d'événements, donc, par continuité croissante,

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \right) = 1$$

$$\text{car } A \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon).$$

$$\text{Or } \bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \subset (|X_N - X| \leq \varepsilon) \text{ donc}$$

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \right) \leq \mathbb{P} (|X_N - X| \leq \varepsilon) \leq 1$$

$$\text{et, par encadrement, } \mathbb{P} (|X_N - X| \leq \varepsilon) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 1.$$

En passant à l'événement contraire, on obtient $\mathbb{P} (|X_N - X| > \varepsilon) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $(X_n)_n$ converge vers X en probabilité.

3. On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a convergence de la série $\sum \mathbb{P} (|X_n - X| > \varepsilon)$. Par le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} (|X_n - X| > \varepsilon) \right) = 0$$

donc en passant au complémentaire

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \right) = 1.$$

$\left(\mathbb{P} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left(|X_n - X| \leq \frac{1}{p+1} \right) \right) \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. Par continuité décroissante,

$$1 = \mathbb{P} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left(|X_n - X| \leq \frac{1}{p+1} \right) \right) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(A)$$

donc $\mathbb{P}(A) = 1$ et $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X .

4. On suppose la convergence en probabilité de $(X_n)_n$ vers X . On construit une extractrice par récurrence dans l'idée de rendre convergente la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} (|X_{\varphi(n)} - X| \geq \varepsilon)$ pour utiliser la question précédente.

- On pose $\varphi(1) = 1$.

- On suppose définis $\varphi(1) < \dots < \varphi(n)$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}\left(|X_{\varphi(k)} - X| > \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

En utilisant la convergence en probabilité avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{(n+1)^2}$, on a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$.

On peut donc choisir $\varphi(n+1) = \max(N, \varphi(n)+1) > \varphi(n)$ vérifiant $\mathbb{P}\left(|X_{\varphi(n+1)} - X| > \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$.

On a alors, pour $\varepsilon > 0$, un rang n_0 à partir duquel $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ et donc

$$\mathbb{P}\left(|X_{\varphi(n)} - X| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$$

qui est un terme général de série convergente, donc $\sum_{n \geq n_0} \mathbb{P}\left(|X_{\varphi(n)} - X| \geq \varepsilon\right)$ converge donc $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(|X_{\varphi(n)} - X| \geq \varepsilon\right)$ converge

et la question précédente assure que $(X_{\varphi(n)})_n$ converge presque sûrement vers X .

Solution de 17 : Loi forte des grands nombres

1. On note $X'_n = X_n - \mu$. Alors

- $\mathbb{E}(X'_n) = \mathbb{E}(X_n) - \mu = 0$
- $\mathbb{V}(X'_n) = \mathbb{V}(X_n) = \sigma^2$
- La suite (X'_n) est encore i.i.d.

- On définit $S'_n = \frac{1}{n}(X'_1 + \dots + X'_n) = S_n - \mu$

Il s'agit donc de montrer que $\mathbb{P}(S'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0) = 1$.

On peut donc, quitte à remplacer X_n par $X_n - \mu$, supposer que $\mu = 0$.

2. Par indépendance, on a

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \mathbb{V}(X) = \frac{\sigma^2}{n}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$$

donc

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Comme $(|S_n| > \varepsilon) \subset (|S_n| \geq \varepsilon)$, on a aussi $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

3. Pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|S_{n^2}| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n^2\varepsilon^2}$$

Le membre de droite est le terme général d'une série convergente. Donc $\sum_n \mathbb{P}(|S_{n^2}| > \varepsilon)$ converge. Par conséquence du lemme de Borel-Cantelli, la suite $(S_{n^2})_n$ converge presque sûrement vers 0.

4. Comme les X_n sont centrés, on calcule pour T_n

- $\mathbb{E}(T_n) = 0$ par linéarité.
- $\mathbb{V}(T_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=m^2+1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{n-m^2}{n^2} \sigma^2$ par indépendance.

Soit $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, on a $m \leq \sqrt{n} < m+1$. Donc $m^2 \leq n < (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$. On en déduit que $n - m^2 \leq 2m \leq 2\sqrt{n}$. Par Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|T_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{n - m^2}{n^2 \varepsilon^2} \sigma^2 \leq \frac{2\sigma^2}{n^{3/2} \varepsilon^2}$$

5. La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc $\sum \mathbb{P}(|T_n| > \varepsilon)$ converge. Ainsi (T_n) converge presque sûrement vers 0.

On a établi que les événements $A = (S_{n^2} \rightarrow 0)$ et $B = (T_n \rightarrow 0)$ sont presque sûrs.

Pour tout $\omega \in A \cap B$,

$$|S_n(\omega)| = \left| \frac{m^2}{n} S_{m^2}(\omega) + T_n(\omega) \right| \leq 1 \cdot |S_{m^2}(\omega)| + |T_n(\omega)|$$

Comme $S_{m^2}(\omega) \rightarrow 0$ et $T_n(\omega) \rightarrow 0$, on a $S_n(\omega) \rightarrow 0$.

D'où $\mathbb{P}(S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0) = 1$.

Solution de 18 : Convergence en loi et séries génératrices

- La suite $(a_{k,n} 1^k)$ est bornée, ce qui implique le résultat.
- Par conservation des inégalités larges à la limite, $|\ell_k| \leq M$ pour tout k , ce qui implique bien que le rayon de convergence est ≥ 1 . Fixons $x \in]-1, 1[$. Si $q \in \mathbb{N}_*$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k x^k \right| &\leq \sum_{k=0}^q |a_{k,n} - \ell_k| |x|^k + 2M \sum_{k=q+1}^{+\infty} |x|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^q |a_{k,n} - \ell_k| |x|^k + \frac{2M |x|^{q+1}}{1 - |x|} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons q tel que

$$\frac{2M |x|^{q+1}}{1 - |x|} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La suite $(\sum_{k=0}^q |a_{k,n} - \ell_k| |x|^k)_{n \geq 0}$, combinaison linéaire de suites qui convergent vers 0, converge vers 0, donc il existe un rang n_0 tel que

$$(n \geq n_0) \implies \sum_{k=0}^q |a_{k,n} - \ell_k| |x|^k \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$(n \geq n_0) \implies \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k x^k \right| \leq \varepsilon$$

- Il suffit d'appliquer ce qui précède en prenant

$$a_{k,n} = \mathbb{P}(X_n = k)$$

On a bien (1) avec $M = 1$. Et $\ell_k = \mathbb{P}(X = k)$.

- Démarche naturelle : faire apparaître ce que l'on veut voir tendre vers 0 à l'aide de ce qu'on sait tendre vers 0. Pour simplifier les écritures, on peut supposer

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |b_k| \leq M$$

(quitte à remplacer M par un réel plus grand).

On a, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$h(x) - h_n(x) = a_{0,n} - b_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_{k,n}) x^k$$

d'où

$$\begin{aligned} |a_{0,n} - b_0| &\leq |h(x) - h_n(x)| + \left| \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_{k,n}) x^k \right| \\ &\leq |h(x) - h_n(x)| + 2M \sum_{k=1}^{+\infty} x^k \\ &= |h(x) - h_n(x)| + 2M \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $x_0 \in]0, 1[$ tel que

$$2M \frac{x_0}{1-x_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe alors un rang n_0 tel que

$$(n \geq n_0) \implies |h(x_0) - h_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et alors

$$(n \geq n_0) \implies (|a_{0,n} - b_0| \leq \varepsilon)$$

ce qui conclut.

5. Un sens a déjà été fait, reste la réciproque. On suppose que, pour tout t dans $]0, 1[$,

$$G_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_X(t)$$

On applique alors la question précédente (les hypothèses en sont facilement vérifiées avec $M = 1$), on obtient

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = 0)$$

Mais alors la suite de fonctions $\left(t \mapsto \frac{G_{X_n}(t) - \mathbb{P}(X_n = 0)}{t} \right)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \frac{G_X(t) - \mathbb{P}(X = 0)}{t}$ sur $]0, 1[$, et la question précédente s'applique de nouveau pour conclure que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = 1)$$

et on conclut par une récurrence à hypothèse forte : si, pour tout $k \in \{0, \dots, q\}$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

alors on peut dire que la suite de fonctions $\left(t \mapsto \frac{1}{t^{q+1}} \left(G_{X_n}(t) - \sum_{k=0}^q \mathbb{P}(X_n = k) t^k \right) \right)_{n \geq 0}$ converge vers la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{q+1}} \left(G_X(t) - \sum_{k=0}^q \mathbb{P}(X = k) t^k \right)$ ce qui permet d'appliquer de nouveau la question précédente pour obtenir

$$\mathbb{P}(X_n = q+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = q+1)$$

et de conclure la récurrence.

6. Application de ce qui précède.

7. On peut par exemple considérer X_n qui suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$. La fonction génératrice en est

$$g_n : t \mapsto \frac{1}{n+1} \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

La suite g_n converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction nulle, qui n'est pas une fonction génératrice.