TD ∗ Séries entières

1 **X** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On définit $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$.

Comparer les rayons de convergence des séries entières $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$ et $\sum \frac{S_n}{n!}x^n$.

2 **Un lemme utile** Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement s'il existe $\alpha>0$ et $M>0$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad |a_n|\leqslant M\alpha^n$$

Ce lemme est utile lorsqu'une suite (a_n) est donnée par une relation de récurrence. On trouve $\alpha>0$ tel que l'inégalité $|a_n|\leqslant M\alpha^n$ soit récurrente. On ajuste M pour que cette inégalité soit vraie pour les petites valeurs de n.

Si une suite (a_n) vérifie

$$\forall n\geqslant 2,\qquad a_n=\frac{a_{n-1}}{n}+2a_{n-2}$$

montrer que $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ a un rayon de convergence non nul.

3 **Mines-Ponts – Fonctions complexes analytiques**

Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. On note f sa somme.

1. Soit r un élément de $]0,R[$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   $$a_n\;=\;\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,d\theta$$
   (b) On note alors $M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$ dont on admet l'existence (une histoire de fonction continue sur un compact... cf plus tard !). Majorer $|a_n|$ à l'aide de r, n, $M(r)$.
   (c) Que peut-on dire d'une série entière dont le rayon de convergence est infini et dont la somme est bornée ?
2. (a) Montrer que pour $0<r<R$,
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2\,d\theta.$$
   (b) Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?
   (c) On suppose maintenant que $R=+\infty$ et qu'il existe $P\in\mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)|\leqslant P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f\in\mathbb{C}_N[X]$ (ce qui généralise 1.(c)).
   On pourra étudier la limite lorsque $r\to+\infty$ du reste d'ordre N évalué en r et divisé par r^{2p} pour plusieurs valeurs de p.

4 **Mines-Ponts** Démontrer que ϕ définie par

$$\phi(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$$

est continue sur $[-1,1]$, et exprimer ϕ au moyen des fonctions usuelles (on utilisera deux méthodes : dérivation, et décomposition en éléments simples).

5 **Centrale – Décomposition en série entière d'une fonction rationnelle**

1. Soit a un nombre complexe non nul. Montrer que la fonction $z\mapsto\frac{1}{z-a}$ est développable en série entière sur un disque ouvert centré en 0. Donner ce développement, et son rayon de convergence.
2. En déduire que, si m est un entier naturel non nul et a un complexe non nul, $z\mapsto\frac{1}{(z-a)^m}$ est développable en série entière sur $D(0,|a|)$. Calculer les coefficients de ce développement.
3. Soit F une fraction rationnelle complexe n'admettant pas 0 pour pôle. En utilisant la décomposition en éléments simples de F, démontrer que F est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? (on l'exprimera en fonction des modules des pôles de F)
4. On écrit F sous forme irréductible : $F=P/Q$. En écrivant $QF=P$, démontrer que la suite des coefficients du développement en série entière de F vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire.
5. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit a_n le nombre de solutions de l'équation $x+2y+5z=n$, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{N}^3$. Montrer, si $|z|<1$, que
   $$\frac{1}{(1-z)\left(1-z^2\right)\left(1-z^5\right)}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$$
6. Donner un équivalent de a_n quand $n\to+\infty$.

6 **ENS** Démontrer que $x\mapsto\frac{x}{e^x-1}$ est développable en série entière, ses coefficients étant rationnels.

7 **ENS** Soit des séries entières $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ de rayons de convergence non nuls, de sommes respectives $f(z)$ et $g(z)$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_nb_nz^n$ est non nul. On note $h(z)$ la somme de cette série entière.
2. Montrer l'existence d'un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}$ tel que
   $$\forall(z,z')\in V^2,\quad h(zz')=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(ze^{i\theta}\right)g\left(z'e^{-i\theta}\right)d\theta$$

8 **ENS** Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, q dans $\mathbb{C}^*$ tel que $|q|<R$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}\in(\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n\sim q\,b_{n+1}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

9 Centrale

On note I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$ et on convient que $I_0=1$.

1. Démontrer que, si $n\geqslant 1$, alors
$$I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}$$
2. Démontrer que la série entière $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{I_n}{n!}x^n$ converge pour tout x dans $]-1,1[$.

   On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a $S'(x)=(1+x)S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

10 Centrale

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{x^n}{n!}$ puis déterminer un équivalent de sa somme quand x tend vers $+\infty$.

11 X

Etant donné une suite de carré sommable (a_n), on pose $f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n-t}$ où la variable t est réelle.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
3. Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2,1/2]$, la suite (a_n) l'est.

12 X-ENS – Théorèmes taubériens

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ existe pour tout $x\in]-1,1[$ et $f(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}\ell\in\mathbb{C}$. Démontrer que la série $\sum a_n$ converge et a pour somme ℓ dans les cas suivants :

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\geqslant 0$
2. $a_n=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$
3. $\sum n|a_n|^2$ converge
4. $\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\to 0$

Ce sont des des conditions suffisantes pour que la réciproque du théorème d'Abel radial soit vraie. Le théorème taubérien de Hardy-Littlewood dit que la conclusion reste valable si $a_n=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ (voir sujet Mines-Ponts 2016, CCP 2005, X 1982...)

13 Formules de Newton et aplication à la méthode de Fadeev-Leverrier de calcul du polynôme caractéristique d'un matrice carrée

Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les racines (complexes, pas nécessairement distinctes) du polynôme caractéristique χ_A de la matrice carrée d'ordre n (réelle ou complexe) A. On note

$$\chi_A(t)=t^n-p_1t^{n-1}-\cdots-p_n$$

et, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1 :

$$s_k=\lambda_1^k+\cdots+\lambda_n^k\ .$$

1. On veut démontrer que les p_i et les s_k sont liés entre eux par les formules suivantes, dites de Newton :
$$\text{si } 1\leqslant k\leqslant n\ :\ kp_k=s_k-p_1s_{k-1}-\cdots-p_{k-1}s_1\ ;$$
$$\text{si } k\geqslant n+1\ :\ s_k=p_1s_{k-1}+\cdots+p_ns_{k-n}\ .$$
   (a) On définit, si $u\in\mathbb{C}$,
$$f(u)=\prod_{i=1}^{n}(1-u\lambda_i)$$
   Montrer que la fonction $\frac{f'}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

   (b) Développer le polynôme $f(u)$ en exprimant ses coefficients à l'aide de $p_1,\dots,p_n$.

   (c) Conclure.
2. Démontrer que, pour tout $k\geqslant 1$:
$$s_k=\operatorname{tr}A^k$$
3. On construit deux suites de matrices et une suite de nombres par l'algorithme suivant :
$$\begin{array}{ccc} A_1=A & q_1=\operatorname{tr}A_1 & B_1=A_1-q_1I_n\\ A_2=AB_1 & 2q_2=\operatorname{tr}A_2 & B_2=A_2-q_2I_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ A_n=AB_{n-1} & nq_n=\operatorname{tr}A_n & B_n=A_n-q_nI_n\end{array}$$
   (a) Montrer que les q_k sont les p_k en utilisant les formules de Newton.

   (b) Montrer que B_n est nulle.
4. On définit enfin le polynôme matriciel
$$Q(t)=t^{n-1}I_n+t^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1}$$
   et on suppose connue une valeur propre λ de A. Démontrer que chaque colonne non nulle de la matrice $Q(\lambda)$ est un vecteur propre de la matrice A.

14 Formule de Ramanujan

On se propose d'établir la formule suivante, dûe à Ramanujan, et dont la première démonstration était basée sur les fonctions elliptiques :

$$\frac{1}{\pi}=\frac{3}{16}+\frac{9}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k}\right)^2\frac{4k^2-1}{2^{4k}(k+1)^2}\ .$$

On admettra les formules de Wallis, démontrées dans un exercice d'intégration :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}x\,dx=\frac{\pi}{2}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\quad\text{et}\quad\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\ .$$

En effectuant un calcul direct de l'intégrale d'une part, en utilisant le développement en série entière de $\sqrt{1+u}$ d'autre part, démontrer l'égalité suivante, pour tout x de l'intervalle $[0,1[$:

$$\int_0^x t\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{3}\left(1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{x^2}{2}-\sum_{j=2}^{+\infty}\frac{\binom{2j-4}{j-2}}{(j-1)2^{2j-3}}\frac{x^{2j}}{2j}\ .$$

Puis justifier que cette égalité est encore vraie pour $x=1$. On remplace alors x par $\sin u$ dans l'égalité, et on intègre entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Montrer que l'on obtient la formule annoncée.

Des formules dûes à Ramanujan, la suivante est sans doute l'une des plus belles :

$$\pi=\frac{9801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}\right)^{-1}$$