1 Montrer que $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Solution de 1 :
Passer par les sommes partielles et utiliser la formule de Stirling.

Réponse : $\ln\dfrac{2}{\pi}$.

Soit $A\geqslant 1$ et $N=\lfloor A\rfloor$. Alors

$$\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{(-1)^n}{x}\,\mathrm{d}x+\int_N^A\frac{(-1)^N}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+(-1)^{\lfloor A\rfloor}\ln\frac{A}{\lfloor A\rfloor}$$

On a déjà $1\leqslant\dfrac{1}{\lfloor A\rfloor}<1+\dfrac{1}{\lfloor A\rfloor}$ et $A\mapsto(-1)^{\lfloor A\rfloor}$ bornée donc $(-1)^{\lfloor A\rfloor}\ln\dfrac{A}{\lfloor A\rfloor}\xrightarrow[A\to+\infty]{}0$.
On continue le calcul en séparant dans la somme partielle les termes de rang pair et les termes de rang impair.
Supposons, sans perte de généralité, que N est impair et s'écrit $N=2p+1$ (si N est pair, cela revient à sortir un terme de la somme partielle, dont la limite est nulle). On écrit alors

$$\sum_{n=1}^{2p}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{p}\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)-\sum_{k=1}^{p}\ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)=\ln\left(\frac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p}p!^4}\right)=2\ln(2p)!+\ln(2p+1)-4p\ln2-4\ln p!$$

La formule de Stirling permet d'écrire

$$\ln p!=\ln\left(\sqrt{2\pi p}\,p^p\mathrm{e}^{-p}\right)+\mathrm{o}(1)=p\ln p-p+\frac12\ln p+\frac12\ln(2\pi)+\mathrm{o}(1)$$

et donc

$$\ln(2p)!=2p\ln(2p)-2p+\frac12\ln(2p)+\frac12\ln(2\pi)+\mathrm{o}(1)=2p\ln p+2(\ln2-1)p+\frac12\ln p+\frac12\ln(4\pi)+\mathrm{o}(1)$$

donc, en réinjectant,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2p}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)&=2\left(2p\ln p+2(\ln2-1)p+\frac12\ln p+\frac12\ln(4\pi)+\mathrm{o}(1)\right)+\ln2+\ln p+\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)}_{\to0}-(4\ln2)p-4\left(p\ln p-p+\frac12\ln p+\frac12\ln(2\pi)+\mathrm{o}(1)\right)\\&=\ln(4\pi)+\ln2-2\ln(2\pi)+\mathrm{o}(1)\\&=\ln\frac{2}{\pi}+\mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'intégrale converge et sa valeur est }\ln\frac{2}{\pi}.}$

2 **Mines-Ponts** Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe n_0 entier naturel tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, pour tout x réel,

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant|P(x)|.$$

Que peut-on dire de f ?

Solution de 2 : Mines-Ponts
Il existe un point x_0 tel que $P(x_0)=0$. Si x est un réel quelconque, pour tout $n\geqslant n_0$ on peut écrire

$$\left|f(x)-\left(f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^{n_0-1}}{(n_0-1)!}f^{(n_0-1)}(x_0)\right)\right|\leqslant\frac{(x-x_0)^n}{n!}\sup_{[x_0,x]}(|P|)$$

Quand $n\to+\infty$, le majorant tend vers 0, on en déduit que f est polynomiale (de degré au plus n_0-1).

3 Mines-Ponts Soit $u_n=\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrer $u_n=\frac{\ln 2}{n}-\frac{\pi^2}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Solution de 3 : Mines-Ponts

On commence par l'habituel changement de variable $t=u^{1/n}$. Qui donne

$$u_n=\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

On voit d'où vient le premier terme du développement asymptotique. On peut donc écrire

$$n\left(u_n-\frac{\ln 2}{n}\right)=\int_0^1 \frac{u^{1/n}-1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

Comment faire encore sortir un $1/n$? par exemple avec une intégration par parties (pas difficile à justifier) :

$$\int_0^1 \frac{u^{1/n}-1}{1+u}\,\mathrm{d}u=\Big[\ln(1+u)\,(u^{1/n}-1)\Big]_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u$$

Par théorème de convergence dominée (fonction dominatrice : $u\mapsto\frac{\ln(1+u)}{u}$), on voit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

Le calcul de cette intégrale se fait avec une série entière :

$$\forall u\in]-1,1[\qquad \ln(1+u)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}u^k$$

On divise par u. En définissant $\phi_k(u)=\frac{(-1)^{k+1}}{k}u^{k-1}$ on a, avec des notations habituelles,

$$N_1(\phi_k)=\frac{1}{k^2}$$

ce qui autorise l'interversion. On obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

Or, de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

on déduit, séparant les indices pais et impairs (les deux séries convergent, c'est donc légitime) :

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$$

...qui font bien $\pi^2/12$.

4 **Centrale** Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$. Puis déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}\,\mathrm{d}t$.

Solution de 4 : Centrale

Pour le calcul de l'intégrale, le changement de variable $u = \tan t$ est judicieux. Mais quand t varie sur $[0,\pi]$, cela pose quelques problèmes. On peut commencer par remarquer que $\cos$ prend les mêmes valeurs entre 0 et $\pi/2$ d'une part, entre $\pi/2$ et π d'autre part. On coupe l'intégrale en deux morceaux, on montre que ces deux morceaux sont égaux avec le changement de variable $s = \pi - t$. On obtient

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$$

Puis dans cette dernière intégrale on peut faire le changement de variable $u = \tan t$, ou plutôt $t = \operatorname{Arctan} u$. On obtient cette fois

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)\left(1+\dfrac{1}{1+u^2}\right)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(u/\sqrt{2}))^2}$$

On trouve finalement la valeur de l'intégrale : $\pi/\sqrt{2}$. Effectuons ensuite le changement de variable $t = u/n$, on a

$$\int_0^{\pi} \frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \frac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u$$

On coupe l'intégrale de droite en n intégrales sur les segments $[k\pi,(k+1)\pi]$ sur chacun desquels on fait le nouveau changement de variable $u = k\pi + v$ pour obtenir

$$\int_0^{\pi} \frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 v}\,\frac{f\left(\frac{v}{n}\right)+f\left(\frac{v+\pi}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{v+(n-1)\pi}{n}\right)}{n}\,\mathrm{d}v$$

L'étude de convergence simple de ce qu'il y a à l'intérieur fait appel à une somme de Riemann, ensuite on utilise le théorème de convergence dominée (domination par la fonction $t \mapsto N_\infty(f)$ par exemple), on obtient la limite :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} f$$

5 Mines-Ponts ; ENS

Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t)\mathrm{d}t$ ait un sens. Démontrer que, si $x > a$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\mathrm{d}t$ a un sens.

On pourra examiner deux cas : intégrabilité ou simple convergence, pour l'existence de la première intégrale.

Solution de 5 : Mines-Ponts ; ENS

FGN 5 1.3

Il y a deux manières pour l'intégrale d'avoir un sens. Et donc, d'abord, traitons l'énoncé suivant, très simple :
Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que $t \mapsto e^{-ta} f(t)$ soit intégrable sur $[0,+\infty[$. Démontrer que, si $x > a$, alors $t \mapsto e^{-tx} f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Solution :
Si $x > a$, $\forall t \in [0,+\infty[\quad \left|e^{-tx} f(t)\right| = e^{-tx}|f(t)| \leqslant e^{-ta}|f(t)| = \left|e^{-ta} f(t)\right|$
ce qui suffit pour conclure.

Posons-nous maintenant le problème plus difficile suivant :
Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t)\, dt$ converge. Démontrer que, si $x > a$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\, dt$ converge (ici, on ne suppose pas l'intégrabilité)
Pour cela, toujours le même principe , on introduit la fonction

$$F \;:\; y \mapsto \int_0^y e^{-ta} f(t)\, dt$$

pour faire une intégration par parties dans $\int_0^A e^{-tx} f(t)\, dt)$

$$\begin{aligned}
\int_0^A e^{-tx} f(t)\, dt &= \int_0^A e^{-ta} f(t)\, e^{-t(x-a)}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^A F'(t)\, e^{-t(x-a)}\, \mathrm{d}t \\
&= \left[e^{-t(x-a)}\, F(t)\right]_{t=0}^{t=A} + (x-a)\int_0^A F(t)\, e^{-t(x-a)}\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Mais d'une part

$$e^{-A(x-a)}\, F(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

(car F a une limite finie en $+\infty$) et d'autre part F est bornée (continue sur $[0,+\infty[$ et ayant une limite réelle en $+\infty$) donc $t \longmapsto F(t)\, e^{-t(x-a)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ ($t \longmapsto e^{-t(x-a)}$ l'est), ce qui conclut.

6 Ultra classique : inégalités de Hölder et de Minkowski

Soit $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $t > 0$. Montrer que $ab \leqslant \dfrac{(at)^p}{p} + \dfrac{(b/t)^q}{q}$.
2. **Inégalité de Hölder** : Soit $a < b$ et $f, g : I \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que fg l'est et que l'on a
$$\int_I fg \leqslant \left(\int_I f^p\right)^{1/p} \left(\int_I g^q\right)^{1/q}$$
On pourra commencer par traiter le cas où $\int_I f^p = \int_I g^q = 1$.
3. **Inégalité de Minkowski** : Soit I intervalle, $f, g : I \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que $(f+g)^p$ l'est et que l'on a
$$\left(\int_I (f+g)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_I f^p\right)^{1/p} + \left(\int_I g^p\right)^{1/p}$$
On pourra remarquer que
$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$
4. On pose $a < b$ et on note $N_p(f) = \left(\displaystyle\int_a^b f^p\right)^{1/p}$ où $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue.

   Montrer que $N_p(f) \xrightarrow[p \to +\infty]{} N_\infty(f) = \sup\limits_I |f|$.

   On pourra commencer par traiter le cas où $[a, b] = [0, 1]$*... ou pas !*

Solution de 6 : Ultra classique : inégalités de Hölder et de Minkowski

FGN 5 1.29

1. Inégalité de concavité en composant par $\ln$.
2. Si $N_p(f)$ et $N_p(g)$ ne sont pas nuls, on peut remplacer f et g par $f_1 = \dfrac{f}{N_p(f)}$ et $g_1 = \dfrac{g}{N_p(g)}$ et on applique la question précédente à $f_1 g_1$ avec $t = 1$, ça donne l'intégrabilité de fg, puis on intègre sur I. On obtient $\displaystyle\int_I f_1 g_1 \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   On en déduit l'inégalité voulue.

   Si, par exemple, $N_p(f) = 0$ alors, f étant continue par morceaux sur I, quitte à découper l'intégrale sur des sous-intervalles sur lesquels f est continue (et positive), on obtient que f est nulle sauf éventuellement en des points isolés, et l'inégalité s'écrit $0 \leqslant 0$.
3. On traite d'abord le cas où $I = [a, b]$.

   On applique deux fois l'inégalité de Hölder en remarquant que $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$.

   On conclut en traitant à part le cas où $\int_I (f+g)^p = 0$.

   Pour I intervalle quelconque, le cas précédent appliqué sur $[a, b] \subset I$ donne $\displaystyle\int_a^b fg \leqslant \left(\int_I f^p\right)^{1/p} + \left(\int_I g^p\right)^{1/p}$ ce qui, par positivité donne l'intégrabilité de $(f+g)^p$ et en passant aux limites, donne l'inégalité voulue.
4. Seul le cas où f est à valeurs réelles positives a de l'intérêt, sinon on l'applique à $|f|$. D'abord, de
$$\forall t \in [0, 1] \qquad f(t) \leqslant \|f\|_\infty$$
on déduit
$$\forall t \in [0, 1] \qquad f(t)^p \leqslant \|f\|_\infty^p$$
(on a bien sûr $p > 0$, puisque ce qui nous intéresse est ce qui se passe quand $p \to +\infty$). En intégrant cette inégalité on déduit
$$\left(\int_0^1 f^p(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant \|f\|_\infty$$
et donc c'est une minoration qui nous importe.

   f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc est bornée (on en a déjà tenu compte !) et atteint ses bornes. Soit donc $t_0 \in [0, 1]$ tel que
$$f(t_0) = \|f\|_\infty$$
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \qquad f(t) \geqslant \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$$

(si $t_0=0$ ou $t_0=1$, on se contente d'écrire cela sur un segment $[0,\eta]$ ou sur un segment $[1-\eta,1]$, et on fait le même raisonnement). Alors, pour tout $p>0$,

$$\int_0^1 f^p(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} f^p(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 2\eta\left(\|f\|_\infty-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

et donc

$$\left(\int_0^1 f^p(t)\ \mathrm{d}t\right)^{1/p} \geqslant (2\eta)^{1/p}\left(\|f\|_\infty-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Mais

$$(2\eta)^{1/p}\left(\|f\|_\infty-\frac{\varepsilon}{2}\right)\xrightarrow[p\to+\infty]{}\|f\|_\infty-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant\|f\|_\infty-\varepsilon$$

(passer sous forme exponentielle-logarithme si on a un doute), donc il existe un p_0 tel que

$$\forall p\geqslant p_0 \qquad \left(\int_0^1 f^p(t)\ \mathrm{d}t\right)^{1/p}\geqslant\|f\|_\infty-\varepsilon$$

On conclut. Le cas d'un segment $[a,b]$ se traite de la même manière, ou en se ramenant à $[0,1]$ par le changement de variable $t=a+(b-a)u$.

7 **X-ENS** Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue de carré intégrable.

On considère la fonction $g:x\mapsto f(x)-2\mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} g^2=\int_0^{+\infty} f^2.$$

Solution de 7 : X-ENS

FGN 5 1.26

Le second terme de g fait penser à la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Posons $h:x\mapsto -2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$. La fonction h est de classe C^1 et $h'=-h-2f$. On a $g=f+h$ donc

$$g^2=f^2+2fh+h^2=f^2+h(h+2f)=f^2-hh'$$

Il reste à montrer que hh' a une intégrale nulle. Or,

$$\int_0^x h(t)h'(t)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}h(t)^2\right]_0^x=\frac{h^2(x)}{2}.$$

Il suffit donc de montrer que h tend vers 0 en $+\infty$ pour conclure. Si f tendait vers 0 en $+\infty$, on pourrait appliquer le théorème d'intégration des relations de comparaison (en $+\infty$, $\mathrm{e}^x f(x)=o(\mathrm{e}^x)$ et exp étant positive non intégrable en $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$ serait un $\mathrm{o}(\mathrm{e}^x)$, mais ce n'est pas forcément le cas.

On adapte la preuve de ce théorème d'intégration pour utiliser l'intégrabilité de f^2 avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\mathrm{A}>0$ tel que $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(t)^2\ \mathrm{d}t\leqslant\varepsilon^2$. Pour $x\geqslant \mathrm{A}$, on a

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\right|\leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_0^{\mathrm{A}}|f(t)|\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}\int_{\mathrm{A}}^x|f(t)|\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{\mathrm{A}}^x|f(t)|\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\leqslant\sqrt{\int_{\mathrm{A}}^x f(t)^2\ \mathrm{d}t}\sqrt{\int_{\mathrm{A}}^x \mathrm{e}^{2t}\ \mathrm{d}t}\leqslant\varepsilon\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2A}}{2}}\leqslant\varepsilon\mathrm{e}^x$$

On a donc, pour $x\geqslant \mathrm{A}$,

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\right|\leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_0^{\mathrm{A}}|f(t)|\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t+\varepsilon$$

Comme le premier terme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on a

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\right|\leqslant 2\varepsilon,$$

pour x assez grand.

8 **ENS** Soit f, g deux applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_*^+$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f g^n$. Montrer que la suite $\left(I_n^{1/n}\right)$, puis la suite $\left(I_{n+1}/I_n\right)$, convergent vers $\max(g)$.

Solution de 8 : ENS

On commencera par une majoration simple (on dira évidemment que f et g sont strictement positives sur $[0,1]$, continues donc atteignant chacune un minimum et un maximum sur ce segment). On commence par une majoration simple :

$$\forall t \in [0,1] \qquad f(t)\,\left(g(t)\right)^n \leqslant f(t)\left(\max(g)\right)^n$$

d'où l'on tire

$$I_n^{1/n} \leqslant \max(g)\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}$$

et le majorant tend vers $\max(g)$.

Bien sûr, minorer, c'est un peu moins naturel. Il va sans doute falloir sortir les epsilons. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et un segment J de longueur η inclus dans $[0,1]$ tel que

$$\forall t \in J \qquad g(t) \geqslant \max(g) - \frac{\varepsilon}{2}$$

(il n'est pas restrictif de supposer $\max(g) - \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$).

Ensuite, il y a un peu de technique. L'histoire des I_{n+1}/I_n est nettement plus dure. On peut commencer par dire que

$$I_{n+1} \leqslant \max(g) I_n$$

mais c'est dans l'autre sens que, tout au moins si g atteint son maximum en une infinité de points, la rédaction est compliquée. On s'en sort autrement, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui permet de dire que

$$I_{n+1}^2 \leqslant I_n I_{n+2}$$

et donc la suite de terme général I_{n+1}/I_n croît. Majorée par $\max(g)$, elle converge vers une limite $\ell > 0$.

Donc la suite de terme général $\ln I_{n+1} - \ln I_n$ converge vers $\ln \ell$. Par le théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\ln I_{k+1} - \ln I_k\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$$

et le résultat sur $\left(I_n^{1/n}\right)$ permet alors de conclure.

9 X-ENS : inégalité de Hardy

Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ et $F\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que si f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$, F^2 l'est, et

$$\int_0^{+\infty}F^2\leqslant 4\int_0^{+\infty}f^2.$$

Solution de 9 : X-ENS : inégalité de Hardy

FGN 5 1.28

Cette inégalité, apparemment trouvée par Hardy, est un grand classique de l'oral. Assez purement technique, pas évidente, ce n'est pas pour autant un excellent exercice d'oral.

Commençons par remarquer que F se prolonge par continuité en 0 : si g est une primitive de f sur $[0,+\infty[$, alors

$$F(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{}g'(0)=f(0)$$

ce qui fait qu'il n'y a pas de problème en 0. Cela dit, F n'est pas a priori dérivable en 0, on fait donc une intégration par parties sur $[a,b]$, $0<a<b$:

$$\begin{aligned}\int_a^b F^2&=\left[-\frac{1}{x}\left(\int_0^x f\right)^2\right]_a^b+2\int_a^b\frac{1}{x}f(x)\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\left[-xF^2(x)\right]_a^b+2\int_a^b fF\end{aligned}$$

On fait tendre a vers 0, on utilise la positivité de $bF^2(b)$ et on obtient

$$\int_0^b F^2\leqslant 2\int_0^b fF\leqslant 2\sqrt{\int_0^b f^2}\sqrt{\int_0^b F^2}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz).

Si F est nulle, f l'est et rien n'est à démontrer.

Sinon, au moins pour b assez grand, on peut diviser pour obtenir

$$\sqrt{\int_0^b F^2}\leqslant 2\sqrt{\int_0^b f^2}$$

ce qui permet de conclure en même temps à l'intégrabilité et à l'inégalité de Hardy.

10 X-ENS : inégalité de Kolmogorov

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ avec f et f'' de carré intégrable.

Montrer que f' est de carré intégrable et que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2\right)\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2.$$

Solution de 10 : X-ENS : inégalité de Kolmogorov

FGN 5 1.28

Soit $x\geqslant 0$. On peut écrire par intégration par parties

$$\int_0^x f'^2 = f(x)f'(x)-f(0)f'(0)-\int_0^x ff''$$

Or, ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$puisque d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $\mathrm{A}\geqslant 0$,

$$\int_0^{\mathrm{A}}\left|ff''\right|\leqslant\sqrt{\int_0^{\mathrm{A}} f^2}\sqrt{\int_0^{\mathrm{A}} f''^2}\leqslant\sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f''^2}$$

Dans ces conditions, $\int_0^x ff''$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$. Raisonnons par l'absurde et supposons f'^2 non intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Alors l'intégrale $\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Étant donné ce qui précède, $f(x)f'(x)$ tend aussi vers $+\infty$ lorsque en $+\infty$. Cela implique classiquement que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}f^2(x)=+\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f^2.

Ainsi, f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$et par un raisonnement analogue, on démontre qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_-$: donc f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. 2. L'intégration par parties faite à la question précédente assure que ff' admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ puisque f'^2 et ff'' sont intégrables. Ces limites sont forcément nulles car sinon la fonction intégrable f^2, de dérivée $2ff'$ aurait une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$ ce qui est impossible. Ainsi, en prenant $y<x$ dans $\mathbb{R}$ pour écrire

$$\int_y^x f'^2 = f(x)f'(x)-f(y)f'(y)-\int_y^x ff'',$$

et en faisant tendre x vers $+\infty$ et y vers $-\infty$, il vient $\int_{\mathbb{R}} f'^2=-\int_{\mathbb{R}} ff''$. Pour $A\geqslant 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}}\left|ff''\right|\leqslant\sqrt{\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f^2}\sqrt{\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f''^2}\leqslant\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f''^2},$$

puis, par passage à la limite,

$$0\leqslant\int_{\mathbb{R}} f'^2=-\int_{\mathbb{R}} ff''\leqslant\left|\int_{\mathbb{R}} ff''\right|\leqslant\int_{\mathbb{R}}\left|ff''\right|\leqslant\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f''^2}.$$

En élevant au carré, l'inégalité demandée est prouvée.

11 X

Étudier l'application

$$f\ :\ x\longmapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\frac{\cos t-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution de 11 : X

On voit assez facilement que le domaine de définition est $]0,+\infty[$. On définit alors, sur $]0,+\infty[^2$,

$$h\ :\ (x,t)\mapsto\mathrm{e}^{-xt}\,\frac{\cos t-\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

qui vérifie toutes les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$, avec domination sur tout segment :

$$\forall x\in[a,b]\quad\forall t>0\qquad\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\mathrm{e}^{-at}\left|\cos t-\mathrm{e}^{-t}\right|$$

(on a supposé $a\leqslant b$). On calcule f', on en déduit f en utilisant le fait que la limite de f en $+\infty$ est nulle (tcvd).

12 **Un classique** Soit f de classe $\mathscr{C}^p$ $(p \geqslant 1)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose $f(a)=0$ $(a \in I)$. Montrer qu'il existe g de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ sur I telle que

$$\forall x \in I \qquad f(x)=(x-a)g(x).$$

Indication : écrire $f(x)=f(a)+\displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ *puis faire un changement de variable dans l'intégrale.*

Solution de 12 : Un classique

Tout est dans l'indication ! Il faut savoir faire un changement de variable affine pour ramener une intégrale sur un segment quelconque à une intégrale sur $[0,1]$: ici, on fait le changement de variable

$$t=a+u(x-a)$$

On obtient

$$f(x)=(x-a)\int_0^1 f'(a+u(x-a))\,\mathrm{d}u$$

puis il n'y a plus qu'à appliquer soigneusement les théorèmes de classe C^k d'une fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$, on peut prendre ici des fonctions dominantes constantes.

13 **ENS** Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ une subdivision de $[0,1]$. On note P le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points x_i.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$(f-P)(x)=g(x)\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$$

2. On suppose $f \in \mathscr{C}^{p+1}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$(f-P)(x)=\frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$$

Solution de 13 : ENS

Pour la première question, il suffit de montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{(f-P)(x)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)}$$

qui est continue ailleurs qu'en les x_i a une limite finie en chaque x_i. Il suffit donc de montrer, pour chaque i, que la fonction

$$x \mapsto \frac{(f-P)(x)}{x-x_i}$$

a une limite en x_i. Ce qui ramène à l'exercice précédent... Ou plus simplement à une limite de taux d'accroissement d'une fonction dérivable !!

Pour la deuxième question, sans rapport avec la première (ce qui peut surprendre), on applique plusieurs fois le théorème de Rolle, voir exercices sur la dérivation.

14 ENS : Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß

Pour $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$, fonction 2π-périodique, on pose $I(f) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. I est-elle définie ?
2. En utilisant $\psi(t) = \exp\left(\displaystyle\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right)$, montrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.

Soit P un polynôme complexe. On pose $f_P(t) = P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$. On admet le théorème de d'Alembert-Gauß dans la question 3, mais pas dans la question 4.

3. Caractériser $I(f_P)$ à l'aide des zéros de P.
4. En utilisant $P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$ pour r variable, donner une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß.

Solution de 14 : ENS : Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß

FGN analyse 2 1.52

1. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $\dfrac{f'}{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence de $I(f)$.
2. La fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t \frac{f'}{f}$ est $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée vaut
$$\psi'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \exp\left(\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\mathrm{d}\theta\right) = \frac{f'(t)}{f(t)}\psi(t)$$
Autrement dit, tout comme f, ψ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre $1, y' - \frac{f'}{f}y$. Il existe donc un réel K tel que $\psi = \mathrm{K}f$. Or f est 2π-périodique, donc ψ l'est aussi. Ainsi, $\psi(2\pi) = \psi(0) = 1$ et il en résulte que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et $I(f) \in \mathbb{Z}$.
3. On ne peut définir $I\left(f_P\right)$ que si la fonction f_P ne s'annule pas sur le cercle unité, c'est-à-dire si P n'a pas de racine de module 1. Faisons cette hypothèse et notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P où $n = \deg P$ (on sait que ces racines existent par le théorème de d'Alembert qu'on admet dans cette question). On sait que
$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_k}$$
On en déduit que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$,
$$\frac{f_P'(t)}{f_P(t)} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\frac{P'\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}{P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \alpha_k}$$
puis que
$$I\left(f_P\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \alpha_k}\,\mathrm{d}t$$
Pour calculer ces intégrales, nous effectuons un développement en série entière de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{\mathrm{X} - \alpha_k}$. Il faut distinguer deux cas selon que $|\alpha_k|$ est supérieur ou inférieur à 1.
Si $|\alpha_k| < 1$, on écrit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \alpha_k} = \frac{1}{1 - \alpha_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_k^p \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}$$
Cette série étant normalement convergente, on peut intervertir sommation et intégration sur le segment $[0, 2\pi]$. On obtient
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \alpha_k} = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_k^p \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\,ipt}\,\mathrm{d}t = 1$$
car seul le terme qui correspond à $p = 0$ n'est pas nul et vaut 2π. Si $|\alpha_k| > 1$, on écrit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \alpha_k} = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\alpha_k}\frac{1}{1 - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\alpha_k}} = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)t}}{\alpha_k^{p+1}}$$

Comme précédemment, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\alpha_k}=-\frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_k^{-(p+1)}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)t}\,\mathrm{d}t=0$$

car cette fois toutes les intégrales sont nulles. On déduit de ces calculs que $I\left(f_P\right)$ est égal au nombre de racines du polynôme P qui sont à l'intérieur du disque unité.

4. Démontrons le théorème de d'Alembert en raisonnant par l'absurde. Soit P un polynôme non constant, de degré n. On suppose donc que P ne possède pas de racine. Pour tout $r \geqslant 0$, la fonction φ_r définie par $\varphi_r(t)=P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$ ne s'annule pas sur $[0,2\pi]$ et on peut définir $I\left(\varphi_r\right)$. On pose, pour tout $r \geqslant 0$,

$$F(r)=I\left(\varphi_r\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}\mathrm{d}t$$

Vérifions que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

H1 Pour tout $t \in [0,2\pi]$, la fonction $r \longmapsto \dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

H2 Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $\mathbb{R}^+$.

H3 La fonction $z \longmapsto \dfrac{zP'(z)}{P(z)}$ est continue sur $\mathbb{C}$ et tend vers une limite finie quand $|x|$ tend vers $+\infty$.
On en déduit qu'elle est bornée sur $\mathbb{C}$.
Il existe donc $\mathrm{K}>0$ tel que, pour tout $(r,t)\in\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]$ on ait $\left|\dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}\right| \leqslant K$ et une fonction constante est intégrable sur un segment.

Puisqu'elle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on en déduit qu'elle est constante sur $\mathbb{R}^+$. Il est clair que $F(0)=0$.
On a donc $F(r)=0$ pour tout $r \geqslant 0$.

Calculons maintenant la limite de F en $+\infty$ en passant à la limite dans l'intégrale.
Quand $|z|$ tend vers $+\infty$, on a $\dfrac{zP'(z)}{P(z)} \sim n$ (quotient des termes de plus haut degré).
Justifions l'échange de la limite et de l'intégrale en utilisant le théorème de convergence dominée.

H1 Pour tout $t \in [0,2\pi]$, on a $\dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)} \xrightarrow[r\to+\infty]{} n$.

H2 Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $\mathbb{R}^+$.

H3 La même domination que la continuité convient.

Le théorème de convergence dominée s'applique et on obtient

$$F(r)\xrightarrow[r\to+\infty]{}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n\,\mathrm{d}t=n$$

Puisque $n \geqslant 1$ par hypothèse, cela est contradictoire avec le fait que F est nulle sur $\mathbb{R}_+$. L'hypothèse que P n'a pas de racine est donc absurde.

On peut démontrer, comme dans la question précédente, que pour toutes les valeurs de r pour lesquelles P n'a pas de racine de module r, $F(r)$ est égal au nombre de racines de P qui sont à l'intérieur du cercle de centre 0 de rayon r.

15 **Mines-Ponts** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée. Calculer la limite lorsque $n\to+\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p\frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t$$

Solution de 15 : Mines-Ponts

Source : `ddmaths.free.fr`

La série $\sum a_p\frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left|a_p\frac{t^p}{p!}\right| \leqslant \|(a_n)\|_\infty \frac{t^p}{p!}.$$

De plus, sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment. Enfin,

$$\left|\sum_{p=n}^{+\infty} a_p\frac{t^p}{p!}\right| \leqslant \|(a_n)\|_\infty \mathrm{e}^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée. Posons

$$f_p(t)=a_p\frac{t^p}{p!}\mathrm{e}^{-2t}$$

H1 La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.

H2 Les fonctions f_p et $\sum_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.

H3 Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \left|f_p(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{\left|a_p\right|}{2^{p+1}} \underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme général d'une série convergente.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p\frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t = \sum_{p=n}^{+\infty}\frac{a_p}{2^{p+1}}$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

16 **Mines-Ponts** Soit $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>-1\}$. Si $z\in\Omega$, on pose

$$f(z)=\int_0^1 \frac{t^z}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est définie et continue sur Ω.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1 .
3. Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\mathrm{Re}(z)\to+\infty$.

Solution de 16 : Mines-Ponts

Source : `ddmaths.free.fr`

1. On applique le théorème de continuité sur Ω, il est encore valable pour une variable complexe.

H1 Pour tout $t\in]0,1]$, $z\mapsto \dfrac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω.

H2 Pour tout $z\in\Omega$, $t\mapsto\dfrac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.

H3 Pour $a>-1$, on note $\Omega_a=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)\geqslant a\}$. Pour tous $z\in\Omega_a$ et $t\in]0,1]$,

$$\left|\frac{t^z}{1+t}\right|\leqslant\frac{t^a}{1+t}=\varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0,1]$ car continue et $\varphi(t)\sim t^a$ quand $t\to0^+$.

Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur tout Ω_a. Ceci valant pour tout $a>-1$, on peut encore affirmer que f est définie et continue sur Ω.

2. On observe

$$f(x)+f(x+1)=\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+1}$$

et par continuité

$$f(x+1)\xrightarrow[x\to-1]{} f(0)$$

donc

$$f(x)\underset{x\to-1}{\sim}\frac{1}{x+1}.$$

3. Par intégration par parties

$$(z+1)f(z)=\frac12+\int_0^1\frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_0^1\frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1\left|t^{z+1}\right|\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|t^{z+1}\right|=\left|\mathrm{e}^{(z+1)\ln t}\right|=\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(z)+1)\ln t}=t^{\mathrm{Re}(z)+1}$$

car les exponentielles imaginaires sont de module 1. On a alors

$$\left|\int_0^1\frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{Re}(z)+2}\xrightarrow[\mathrm{Re}(z)\to+\infty]{}0$$

Ainsi,

$$(z+1)f(z)\xrightarrow[\mathrm{Re}(z)\to+\infty]{}\frac12$$

puis

$$f(z)\underset{\mathrm{Re}(z)\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2z}.$$

17 **Mines-Ponts** Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

Solution de 17 : Mines-Ponts

Source : `ddmaths.free.fr`

Étudions la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Notons $u(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(x/t)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times]0,+\infty[$.

On montre la bonne définition et la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$:

H1 Pour chaque $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

H2 Pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

H3 Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in]0,+\infty[$,

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0,+\infty[$.

On en déduit que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

On montre que f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

H1 Pour chaque $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$

H2 Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après ce qui précède.

H3 Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

H4 Soit $a > 0$.

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{(1+t^2)} = \psi_a(t)$$

avec ψ_a fonction intégrable sur $]0,+\infty[$.

On obtient f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec

$$f' : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

Pour $x \neq 1$, on peut décomposer la fraction rationnelle définissant l'intégrande

$$\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{t}{(x^2-1)(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2-1)(x^2+t^2)}$$

et on obtient alors

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{(x^2-1)}$$

Cette identité se prolonge en $x=1$ par un argument de continuité. On a alors

$$f(x) - f(\varepsilon) = \int_\varepsilon^x \frac{\ln(t)}{(t^2-1)}\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Or $f(0) = 0$ et par continuité on parvient à

$$\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = f(x)$$

18 Centrale

1. Déterminer le domaine de définition réel de
$$F(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta$$
2. Calculer $F(x)$.
3. En déduire les valeurs de
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta$$
et de
$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$$

Solution de 18 : Centrale

Source : `ddmaths.free.fr`

1. Posons
$$f(x,\theta)=\frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}.$$
La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie pour tout couple (x,θ) de $\mathbb{R}\times]0,\pi/2[$. Pour $x\in\mathbb{R}$, la fonction $\theta\mapsto f(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi/2[$ et
$$f(x,\theta)\xrightarrow[x\to 0^+]{}x \quad \text{et} \quad f(x,\theta)\xrightarrow[x\to(\pi/2)^-]{}0$$
L'intégrale est faussement généralisée en ses deux bornes (prolongements par continuité) et donc converge. Finalement, $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$
2. **H1** Pour tout $\theta\in]0,\pi/2[$, la fonction $x\mapsto f(x,\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec
$$\frac{\partial f}{\partial x}:(x,\theta)\mapsto\frac{1}{1+x^2\tan^2(\theta)}.$$
H2 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\theta\mapsto f(x,\theta)$ est intégrable sur $]0,\pi/2[$ d'après la question précédente.
H3 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\theta\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi/2[$.
H4 Pour tout $(x,\theta)\in\mathbb{R}\times]0,\pi/2[$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)\right|\leqslant 1=\varphi(\theta)$$
avec φ intégrable sur $]0,\pi/2[$.

Ainsi, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F':x\mapsto\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+x^2\tan^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$, à l'aide du changement de variable $\mathscr{C}^1$ bijectif $t=\tan(\theta)$
$$F'(x)=$$
Pour $x^2\neq 0$ et $x^2\neq 1$, on décompose en éléments simples la fraction
$$\frac{1}{(1+x^2X)(1+X)}$$
et l'on en déduit en prenant t^2 au lieu de X
$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}=\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+x^2t^2}+\frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+t^2}$$
On peut alors poursuivre le calcul de $F'(x)$. Pour $x>0$ et $x\neq 1$,
$$F'(x)=\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$
La fonction F' étant continue et paire, on obtient l'expression sur $\mathbb{R}$
$$\boxed{F'(x)=\frac{1}{|x|+1}\cdot\frac{\pi}{2}.}$$

Enfin, sachant $F(0)=0$, on conclut

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si } x\geqslant 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si } x\leqslant 0 \end{cases}$$

3. Pour $x=1$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Par intégration par parties,

$$\int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\theta}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta = \underbrace{\big[\theta\ln(\sin(\theta))\big]_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon}}_{\longrightarrow 0} - \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$$

et donc

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2}\ln(2).}$$

19 **Centrale** On considère $\varphi : x\longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer la définition et la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que

$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que pour $x>0$,

$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x\to 0^+$.

4. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

Solution de 19 : Centrale

Source : `ddmaths.free.fr`

1. Posons $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}.$$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x,t)|\leqslant \frac{1}{1+t^2}=\psi(t)$$

avec ψ intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$

2. Par intégration par parties,

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\mathrm{i}x}+\frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{te}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

La fonction

$$x\mapsto \int_0^{+\infty} \frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu de la domination

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\right)\right| = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\leqslant \frac{2}{1+t^2}.$$

On en déduit que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\mathrm{i}x^2}-\frac{1}{\mathrm{i}x^2}\int_0^{+\infty} \frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{itx}}}{(1+t^2)^2} = \left[-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + \mathrm{ix}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}xx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xx}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, une dernière intégration par parties donne

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}\left[-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right]_0^{+\infty} + \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$

et la relation voulue...

3. Par le changement de variable $u = tx$, on obtient l'expression proposée.
   On peut décomposer

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\int_0^1 \frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{u\mathrm{ci}u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

   D'une part, par intégration par parties

$$\int_1^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u$$

   avec

$$\left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty} = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{x^2+1} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$$

   et

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{u^2-x^2}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2+1}\underset{x\to0^+}{}1.$$

   D'autre part,

$$\int_0^1 \frac{u\mathrm{c}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{u\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

   avec

$$\int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+u^2\right)\right]_0^1 \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x)$$

   et

$$\left|\int_0^1 \frac{u\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^1 \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right|}{u}\,\mathrm{d}u < +\infty.$$

   Au final,

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\ln(x) + \mathrm{o}(\ln(x)) + \mathrm{o}(1) \underset{x\to0^+}{\sim} \mathrm{i}\ln(x).$$

4. En vertu de ce qui précède

$$\mathrm{Im}\left(\varphi'(x)\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x) \to -\infty.$$

   On en déduit que la fonction réelle $\mathrm{Im}(\varphi)$ n'est pas dérivable en 0 , il en est a fortiori de même de φ.

20 Une nouvelle preuve de la formule de Stirling

On rappelle

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et que $\Gamma : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est définie et indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que $\Gamma(n+1)=n!$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. En réalisant le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, transformer l'intégrale $\Gamma(n+1)$ en

$$\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\mathrm{d}y$$

où $f_n(y)=0$ pour $y\leqslant -\sqrt{n}$, $0\leqslant f_n(y)\leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}$ pour $-\sqrt{n}<y\leqslant 0$ et $0\leqslant f_n(y)\leqslant (1+y)\mathrm{e}^{-y}$ pour $y>0$ et $n\geqslant 1$.

2. En appliquant le théorème de convergence dominée établir, la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}.$$

Solution de 20 : Une nouvelle preuve de la formule de Stirling

Source : `ddmaths.free.fr`

1. Par le changement de variable proposé

$$\Gamma(n+1) = \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\mathrm{d}y$$

avec

$$f_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y\leqslant -\sqrt{n} \\ \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n & \text{si } y > -\sqrt{n} \end{cases}$$

Sur $\left]-\sqrt{n},0\right]$, une étude fonctionnelle montre

$$n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leqslant -\frac{y^2}{2}$$

qui donne $0\leqslant f_n(y)\leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}$.

Sur $[0,+\infty[$, une étude fonctionnelle montre

$$n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leqslant -y+\ln(1+y)$$

pour $n\geqslant 1$. Cela donne $0\leqslant f_n(y)\leqslant (1+y)\mathrm{e}^{-y}$.

2. La fonction

$$\varphi : y \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-y^2/2} & \text{si } y\leqslant 0 \\ (1+y)\mathrm{e}^{-y} & \text{sinon} \end{cases}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En réalisant un développement limité du contenu de l'exponentielle,

$$f_n(y) = \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}+n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

Par convergence dominée,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\mathrm{d}y \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}$$

d'où

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}.$$