

TD * INTÉGRATION

1 Montrer que $I = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x} dx$ converge et la calculer.

2 Mines-Ponts Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe n_0 entier naturel tel que, pour tout $n \geq n_0$, pour tout x réel,

$$|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Que peut-on dire de f ?

3 Mines-Ponts Soit $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$. Montrer $u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

4 Centrale Calculer $\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos^2 t}$. Puis déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\int_0^\pi \frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)} dt$.

5 Mines-Ponts ; ENS Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t) dt$ ait un sens. Démontrer que, si $x > a$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) dt$ a un sens. On pourra examiner deux cas : intégrabilité ou simple convergence, pour l'existence de la première intégrale.

6 Ultra classique : inégalités de Hölder et de Minkowski Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $t > 0$. Montrer que $ab \leq \frac{(at)^p}{p} + \frac{(b/t)^q}{q}$.
2. **Inégalité de Hölder** : Soit $a < b$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que fg l'est et que l'on a

$$\int_I fg \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} \left(\int_I g^q \right)^{1/q}$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\int_I f^p = \int_I g^q = 1$.

3. **Inégalité de Minkowski** : Soit I intervalle, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que $(f+g)^p$ l'est et que l'on a

$$\left(\int_I (f+g)^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} + \left(\int_I g^p \right)^{1/p}$$

On pourra remarquer que

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

4. On pose $a < b$ et on note $N_p(f) = \left(\int_a^b f^p \right)^{1/p}$ où $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue.

Montrer que $N_p(f) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} N_\infty(f) = \sup_I |f|$.

On pourra commencer par traiter le cas où $[a, b] = [0, 1]$... ou pas !

7 X-ENS Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue de carré intégrable.

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} g^2 = \int_0^{+\infty} f^2.$$

8 ENS Soit f, g deux applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}_*^+ et, si $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f g^n$. Montrer que la suite $(I_n^{1/n})$, puis la suite (I_{n+1}/I_n) , convergent vers $\max(g)$.

9 X-ENS : inégalité de Hardy Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $F : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que si f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$, F^2 l'est, et

$$\int_0^{+\infty} F^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2.$$

10 X-ENS : inégalité de Kolmogorov Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 avec f et f'' de carré intégrable.

Montrer que f' est de carré intégrable et que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2 \right) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f''^2.$$

11 X Etudier l'application

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt.$$

12 Un classique Soit f de classe \mathcal{C}^p ($p \geq 1$) sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs réelles ou complexes. On suppose $f(a) = 0$ ($a \in I$). Montrer qu'il existe g de classe \mathcal{C}^{p-1} sur I telle que

$$\forall x \in I \quad f(x) = (x-a)g(x).$$

Indication : écrire $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ puis faire un changement de variable dans l'intégrale.

13 ENS Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ une subdivision de $[0, 1]$. On note P le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points x_i .

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$(f - P)(x) = g(x) \prod_{i=0}^p (x - x_i)$$

2. On suppose $f \in \mathcal{C}^{p+1}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$(f - P)(x) = \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (x - x_i)$$

14 ENS : Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß

Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$, fonction 2π -périodique, on pose $I(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt$.

1. I est-elle définie ?

2. En utilisant $\psi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} d\theta\right)$, montrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.

Soit P un polynôme complexe. On pose $f_P(t) = P(e^{it})$. On admet le théorème de d'Alembert-Gauß dans la question 3, mais pas dans la question 4.

3. Caractériser $I(f_P)$ à l'aide des zéros de P .

4. En utilisant $P(re^{it})$ pour r variable, donner une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß.

15 Mines-Ponts Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée. Calculer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) dt$$

16 Mines-Ponts Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > -1\}$. Si $z \in \Omega$, on pose

$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t} dt$$

1. Montrer que f est définie et continue sur Ω .

2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1 .

3. Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty$.

17 Mines-Ponts Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(x/t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$$

18 Centrale

1. Déterminer le domaine de définition réel de

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan(\theta))}{\tan(\theta)} d\theta$$

2. Calculer $F(x)$.

3. En déduire les valeurs de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan(\theta)} d\theta$$

et de

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta)) d\theta$$

19 Centrale On considère $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer la définition et la continuité de φ sur \mathbb{R} .

2. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et montrer que

$$\varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1+t^2} dt.$$

3. Montrer que pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} du$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

4. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

20 Une nouvelle preuve de la formule de Stirling On rappelle

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et que $\Gamma : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est définie et indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. En réalisant le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, transformer l'intégrale $\Gamma(n+1)$ en

$$\frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy$$

où $f_n(y) = 0$ pour $y \leq -\sqrt{n}$, $0 \leq f_n(y) \leq e^{-y^2/2}$ pour $-\sqrt{n} < y \leq 0$ et $0 \leq f_n(y) \leq (1+y)e^{-y}$ pour $y > 0$ et $n \geq 1$.

2. En appliquant le théorème de convergence dominée établi, la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}.$$