1. Trigonalisation

Solution de 1 : Trigonalisation simultanée

FGN 2 4.21 à 4.24

1. Notons u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement. Le corps de base étant algébriquement clos, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. L'endomorphisme v laisse stable $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$, car u et v commutent. Et donc v induit sur $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$ un endomorphisme v_λ. Cet endomorphisme admet un vecteur propre (car le corps de base est algébriquement clos). Or un vecteur propre de v_λ est un vecteur propre de v qui est dans $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$, et donc est aussi vecteur propre pour u.
   Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$: « si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors il existe P inversibles et T, T' triangulaires supérieures telles que $A = PTP^{-1}$ et $B = PT'P^{-1}$ ».
   Pour $n=1$, c'est bien clair.
   Montrons que $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$; soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ qui commutent. Les endomorphismes u et v de $\mathbb{C}^{n+1}$ canoniquement associés à A et B commutent, donc d'après ce qui précède ont un vecteur propre commun. Dans une base commençant par ce vecteur propre, leurs matrices respectives sont de la forme
   $$A' = \begin{pmatrix} \lambda & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A'' \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} \mu & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B'' \\ 0 & \end{pmatrix}$$
   A' et B' commutent, donc, par produit par blocs, A'' et B'' commutent. On peut leur appliquer $\mathscr{P}_n$, il existe donc $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ et T'', U'' triangulaires supérieures telles que
   $$P^{-1}A''P = T'' \quad , \quad P^{-1}B''P = U''$$
   Soit alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathscr{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$; un produit par blocs montre que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathscr{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ et $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ sont triangulaires supérieures.
2. Comme dans la question précédente, il suffit de montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.
   Or, par hypothèse, $\mathrm{Im}\,B \subset \mathrm{Ker}\,A$ donc $\mathrm{Im}\,B$ est stable par A (pour tout vecteur X, $ABX = 0 \in \mathrm{Im}\,B$) et par B.
   Avec des notations similaires à la question précédente, si u_i et v_i sont les endomorphismes induits par u et v sur $\mathrm{Im}\,v$, alors u_i est l'endomorphisme nul. Donc, si $\mathrm{Im}\,v \neq \{0\}$, un vecteur propre de v_i (qui existe bien car on est sur $\mathbb{C}$) est aussi un vecteur propre de u_i (associé à 0) et est donc un vecteur propre commun à u et v.
   Si $\mathrm{Im}\,v = 0$, alors $B = 0_n$ et on a bien A et B simultanément trigonalisables (ils ont donc au moins un vecteur propre en commun).
   On peut alors raisonner par récurrence sur n comme dans la question précédente.
3. Avec $AB - BA = C$ on remarque que des vecteurs propres communs à A et B sont dans $\mathrm{Ker}\,C$.
   On étudie donc $\mathrm{Ker}\,C$. Soit u, v, w canoniquement associés à A, B, C.
   S'il n'est pas réduit à 0, $\mathrm{Ker}\,w$ est stables par u, v et w vu les hypothèses.
   Les endomorphismes u_k, v_k induit par u et v sur $\mathrm{Ker}\,w$ vérifient alors $u_k \circ v_k - v_k \circ u_k = w_k = \tilde{0}$. donc commutent.
   Ils ont donc un vecteur propre en commun d'après la première question.
   Reste à voir qu'on a bien $\mathrm{Ker}\,w \neq \{0\}$. Sinon, C est inversible et $C^{-1}AB - C^{-1}BA = AC^{-1}B - C^{-1}BA = I_n$ ce qui aboutit à une contradiction en prenant la trace.
   On peut alors rédiger une récurrence comme dans la première question.
4. Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$, on calcule $B^2 = BAB - B^2A = AB^2 - BAB$ en multipliant à gauche et à droite par A.
   On en déduit que $2B^2 = AB^2 - B^2A$. Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $kB = AB^k - B^kA$.
   On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}\,B^k = 0$ et donc, classiquement, B est nilpotente. (Il s'agit de l'exercice **6**, cas particulier du **4**).
   Autre argument possible : $u : M \mapsto AM - MA$ est un endomorphisme qui admet k comme valeur propre si $B^k \neq 0_n$. Comme son spectre est fini (on est en dimension finie), on a au moins un $k \in \mathbb{N}$ tel que $B^k = 0_n$.
   Supposons désormais que $AB - BA = \lambda A + \mu B$. Si $\lambda = \mu = 0$, on est ramené à la première question.

Supposons donc $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$. Sans perte de généralité, supposons que $\mu\neq 0$. On va utiliser la première partie de la question.

Posons $B'=\lambda A+\mu B$. On vérifie alors que $AB'-B'A=\mu B'$ donc, en posant, $A'=\dfrac{1}{\mu}A$, on a $A'B'-B'A'=B'$.

On en déduit que B' est nilpotente. On a alors $\operatorname{Ker} B'\neq\{0\}$ (B' n'est pas inversible) et on vérifie que $\operatorname{Ker} B'$ est stable par A et B'. On obtient alors comme dans la question 2 un vecteur propre de A dans $\operatorname{Ker} B'$, ce qui est aussi un vecteur propre de B.

On termine de nouveau par récurrence sur la dimension de l'espace.

Solution de 2 : Avec la comatrice

FGN 2 2.9, 3.8 et 4.10

1. (a) Notons $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A et $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On notera $\det$ le déterminant dans cette base et par multilinéarité, on a

$$\det(\lambda I_n+A)=\det(\lambda e_1+C_1,\dots,\lambda e_n+C_n)=\sum_{\substack{D_k\in\{\lambda e_k,C_k\}\\1\leqslant k\leqslant n}}\det(D_1,\dots,D_n)$$

Chaque terme de cette dernière somme est un monôme en λ dont le degré est nombre de fois où $D_k=\lambda e_k$. On va noter I l'ensemble des indices k pour lesquels $D_k=C_k$. Se donner un terme de la somme revient à se donner cette partie I et ce terme est alors un monôme de degré $n-j$ avec $j=|I|$ Son coefficient est alors le déterminant obtenu à partir de la matrice identité en remplaçant les colonnes d'indice dans I par les colonnes correspondantes dans A. En développant successivement par les colonnes de cette matrice qui sont celles de la matrice identité (avec un seul 1 sur la diagonale puis des zéros ailleurs), il reste in fine un déterminant de taille j qui est précisément $\det(A|_{I^2})$. En faisant une partition de la somme selon le cardinal de I, on obtient

$$\det(\lambda I_n+A)=\sum_{I\subset[\![1,n]\!]}\det(A|_{I^2})\lambda^{n-|I|}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{I\subset I|,n]\\|I|=j}}\det(A|_{I^2})\lambda^{n-j}$$

   (b) En changeant A en $-A$, le terme $\det(A|_{I^2})$ est transformé en $(-1)^{|I|}\det(A|_{I^2})$ si bien que

$$\chi_A=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\sum_{\substack{|I[1,n]\\|I|=j}}\det(A|_{I^2})\right)X^{n-j}$$

On retrouve en particulier le coefficient de X^{n-1} qui vaut $-\operatorname{tr}A$ et le coefficient constant qui vaut $(-1)^n\det\,A$. On pourra aussi noter que le coefficient en X est égal à $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(\operatorname{Com}A)$.

2. (a) On a la relation $\tilde{A}A=\tilde{A}A=(\det A)I_n$. Si X est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors $\lambda\widetilde{A}X=(\det A)X$ et si $\lambda\neq 0$, on a $\widetilde{A}X=\frac{\det A}{\lambda}X$, donc X est un vecteur propre de $\tilde{A}$. Si $\lambda=0$ alors $\det A=0$. Si $\operatorname{rg}A=n-1$, alors $\operatorname{Im}\widetilde{A}=\operatorname{Ker}A=\operatorname{Vect}(X)$ donc il existe $\mu\in K$ tel que $\widetilde{A}X=\mu X$. Enfin si $\operatorname{rg}A\leqslant n-2, \widetilde{A}=0$ donc X est encore vecteur propre de A .

   (b) On va encore distinguer les cas selon le rang de A .

   - Si A est diagonalisable et inversible, on a $\widetilde{A}=(\det A)A^{-1}$. Les vecteurs propres de $\widetilde{A}$ sont ceux de A^{-1}, c'est-à-dire ceux de A. Ainsi les matrices A et $\widetilde{A}$ sont codiagonalisables.
   - Si $\operatorname{rg}A<n-1$ alors $\widetilde{A}=0$ et tout vecteur non nul de K^n est vecteur propre pour $\widetilde{A}$.
   - Supposons que $\operatorname{rg}A=n-1$. Sans perte de généralité on suppose $\lambda_1=0$ et $\lambda_k\neq 0$ pour $k\geqslant 2$. Comme on l'a vu dans la question 1 , on a $\operatorname{rg}\widetilde{A}=1$ et $\operatorname{Im}\widetilde{A}=\operatorname{Ker}A$ et de plus $\operatorname{Ker}\widetilde{A}=\operatorname{Im}A$. Autrement dit, l'espace propre de $\widetilde{A}$ pour la valeur propre 0 est la somme des espaces propres de A pour les valeurs propres non nulles (c'est-à-dire l'image de A) et la droite $\operatorname{Im}\widetilde{A}$ est la droite $\operatorname{Ker}A$. Ici encore A et $\widetilde{A}$ sont codiagonalisables.

   (c) Si $C\neq 0$, alors $\operatorname{Im}C\subset\operatorname{Ker}A$ et comme $\operatorname{Ker}A$ est de dimension 1, on a $\operatorname{Im}C=\operatorname{Ker}A$; de plus $\operatorname{Im}A\subset\operatorname{Ker}C$ et comme les deux espaces ont même dimension on a $\operatorname{Im}A=\operatorname{Ker}C$. En considérant une base de K^n adaptée à $\operatorname{Im}A$, on obtient une matrice P inversible telle que $P^{-1}CP=(0|\dots|0\mid X)$, où $X\in\operatorname{Im}C=\operatorname{Ker}A$. Comme $A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=0$, on obtient de même $P^{-1}\widetilde{A}P=(0|\dots|0\mid Y)$, où $Y\in\operatorname{Im}C=\operatorname{Ker}A$. Les vecteurs X et Y sont colinéaires donc C est colinéaire à $\widetilde{A}$.

3. En tant que matrice carrée complexe, A est semblable à une matrice triangulaire T dont les termes diagonaux sont les λ_i. On va distinguer trois cas selon le rang de A.
   - Si tous les λ_i sont non nuls, i.e. si A est inversible, la matrice A^{-1} est semblable à la matrice triangulaire T^{-1} dont les termes diagonaux sont les inverses des λ_i, si bien que le spectre de $\widetilde{A}=(\operatorname{Com}A)^{\top}=(\det A)A^{-1}$ est l'ensemble des $\dfrac{\det A}{\lambda_i}=\prod_{j\neq i}\lambda_j$ pour $1\leqslant i\leqslant n$.

- Si $\mathrm{rg} A < n-1$, la comatrice de A est nulle puisque aucune sous-matrice de A de taille $n-1$ ne peut être inversible : le spectre de $\widetilde{A}$ est réduit à $\{0\}$.
- Supposons $\mathrm{rg} A = n-1$. Alors A possède un mineur de taille $n-1$ non nul et $\widetilde{A}$ est non nulle. De plus, $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = 0$. On a donc $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Ker}\, \widetilde{A} \neq \mathbb{C}^n$ et finalement $\mathrm{Ker}\, \widetilde{A} = \mathrm{Im}\, A$ est de dimension $n-1$. Ainsi, 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-1$. Il reste à déterminer la dernière valeur propre qui vaut donc la trace de $\widetilde{A}$. Or, d'après la première question, $(-1)^{n-1} \mathrm{tr}\, \widetilde{A}$ est le coefficient de X dans χ_A.
  De plus, 0 est valeur propre de A. Si on suppose que $\lambda_n = 0$, on a $\chi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_{n-1})X$ et on en déduit que la dernière valeur propre cherchée de $\widetilde{A}$ est $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$.

Conclusion Dans tous les cas, les valeurs propres de $\widetilde{A}$ sont les $\mu_i = \prod_{j\neq i} \lambda_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A prises avec multiplicité.

Solution de 3 : Centrale

1. - Si $A = \lambda I_2$ matrice scalaire, alors $A \in \mathbb{K}[B]$.
   - Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a \neq b$, on vérifie classiquement que B est alors diagonale : $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et, par interpolation de Lagrange, on peut trouver un polynôme P tel que $c = P(a)$ et $d = P(b)$ car $a \neq b$ donc $B = P(A) \in \mathbb{K}[A]$.
   - Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ a\gamma & a\delta \end{pmatrix} = BA = \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha + a\beta \\ a\gamma & a\delta + b\gamma \end{pmatrix}$ d'où on tire que $b\gamma = 0$, $b(\alpha - \delta) = 0$ donc $\gamma = 0$ et $\alpha = \delta$ et enfin $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ a la même forme que A.

     Pour tout polynôme P, $P(A) = \begin{pmatrix} P(a) & * \\ 0 & P(a) \end{pmatrix}$. Calculons le cœfficient manquant.
     - Pour $P = 1$, il vaut 0.
     - Pour $P = X$, il vaut b.
     - Pour $P = X^2$, il vaut $2ab$.
     - Pour $P = X^3$, il vaut $3a^2b$.

     On conjecture que pour $P = X^k$, il vaut $ka^{k-1}b$ ce qui se démontre aisément par récurrence.
     On obtient alors finalement $P(A) = \begin{pmatrix} P(a) & bP'(a) \\ 0 & P(a) \end{pmatrix}$.

   Pour écrire $B = P(A)$, il faut trouver un polynôme P tel que $P(a) = \alpha$ et $bP'(a) = \beta$ c'est-à-dire $P'(a) = \dfrac{\beta}{b}$ (on a $b \neq 0$).
   Le polynôme $P = \dfrac{\beta}{b}(X - a + \alpha)$ convient.
   Dans le cas général, on peut se ramener à l'un des cas précédent par réduction de A (diagonalisation ou trigonalisation selon les cas), en remarquant que si $A = QA'Q^{-1}$, A commute avec $B' = Q^{-1}BQ$ donc soit $B' = Q^{-1}BQ$ est un polynôme en A' ce qui se récrit facilement B polynôme en A, soit l'inverse...
2. On trouve un contre-exemple. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution de 4 : Centrale-Mines Ponts

Si A et B ont le même polynôme caractéristique, en trigonalisant (on est dans $\mathbb{C}$), on arrive facilement à $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr}\, A^k = \mathrm{tr}\, B^k$.
Si, réciproquement, $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr}\, A^k = \mathrm{tr}\, B^k$. On obtient à un système dont les équations sont de la forme $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)} a_\lambda \lambda^k = 0$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et dont la matrice est de Vandermonde avec des paramètres deux à deux distincts, donc le système est de Cramer et tous les a_λ sont nuls, donc les multiplicités des valeurs propres pour A et pour B sont les mêmes, ce qui permet de conclure.

Autre argument possible : Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs de A et B comptées avec multiplicité :

$$\chi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) \quad \text{et} \quad \chi_B = (X-\mu_1)\cdots(X-\mu_n).$$

L'hypothèse proposée donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k = \mu_1^k + \cdots + \mu_n^k$$

Certains λ_i peuvent correspondre à des μ_j, on simplifie ceux-ci et, quitte à reprendre l'indexation, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda_1^k + \cdots + \lambda_r^k = \mu_1^k + \cdots + \mu_r^k$$

avec $\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}\cap\{\mu_1,\dots,\mu_r\}=\varnothing$. Par combinaison linéaire, pour tout polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$,

$$P(\lambda_1)+\cdots+P(\lambda_r)=P(\mu_1)+\cdots+P(\mu_r).$$

On peut définir un polynôme P qui s'annule sur les λ_i et prend la valeur 1 sur les μ_i. Pour celui-ci, il vient $0=r$. On en déduit que les λ_i initiaux et les μ_i initiaux sont égaux à l'ordre près. Les polynômes caractéristiques de A et B sont donc identiques.

Solution de 5 : X

Trigonaliser puis raisonner par récurrence sur le nombre de valeurs propres distinctes de A.

La matrice A est trigonalisable et si l'on note $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ ses valeurs propres distinctes alors

$$\operatorname{tr}(A^m)=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\lambda_j^m$$

avec α_j la multiplicité de la valeur propre λ_j. Pour conclure, il suffit d'établir résultat suivant : « Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{C}^*$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{C}$ deux à deux distincts. Si $\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\lambda_j^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$ alors $\forall 1\leqslant j\leqslant p, |\lambda_j|<1$ ». Raisonnons pour cela par récurrence sur $p\geqslant 1$. Pour $p=1$, la propriété est immédiate. Supposons la propriété vraie au rang $p\geqslant 1$. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_{p+1}\in\mathbb{C}^*$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_{p+1}\in\mathbb{C}$ deux à deux distincts tels que

$$\sum_{j=1}^{p+1}\alpha_j\lambda_j^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}0 \tag{1}$$

Par décalage d'indice, on a aussi

$$\sum_{j=1}^{p+1}\alpha_j\lambda_j^{m+1}\xrightarrow[m\to+\infty]{}0 \tag{2}$$

$\lambda_{p+1}\times(1)-(2)$ donne

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\left(\lambda_{p+1}-\lambda_j\right)\lambda_j^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$$

qui se comprend encore

$$\sum_{j=1}^{p}\beta_j\lambda_j^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$$

avec les $\beta_1,\dots,\beta_p$ non nuls. Par hypothèse de récurrence, on a alors $\forall 1\leqslant j\leqslant p, \lambda_j<1$ pour tout $j\in\{1,\dots,p\}$. On en déduit $\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\lambda_j^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$ et la relation (1) donne alors $\alpha_{p+1}\lambda_{p+1}^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$ d'où l'on tire $|\lambda_{p+1}|<1$. La récurrence est établie.

2. Autour de la nilpotence

Solution de 6 : Mines-Ponts

Même principe que l'exercice 4 dont c'est un cas particulier (en prenant $B=0$.)

Solution de 7 : Inversion et nilpotence

1. Penser à des séries géométrique et vérifier que $(I_n-N)^{-1}=I_n+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$ et une formule analogue pour I_n+N.
2. Le DL de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 au voisinage de 0 s'écrit $\sqrt{1+x}=P_n(x)+o(x^n)$ où P_n est un polynôme connu (en écrivant $(1+x)^{1/2}$). En élevant au carré, on obtient $1+x=P_n^2(x)+o(x^n)$.
   Donc $P_n^2(x)-1-x=o(x^n)$. Posons la division euclidienne de P_n^2-1-X par X^n : $P_n^2-1-X=X^nQ+R$. Alors
   $$\frac{P_n^2(x)-1-x}{x^n}=Q(x)+\frac{R(x)}{x^n}\to 0.$$
   Mais comme le degré de R est au plus $n-1$ et $Q(x)\to Q(0)$, on en déduit que nécessairement $R=0$.
   On a alors $P_n^2-1-X=X^nQ$ puis en évaluant en N dont l'indice de nilpotence est au plus n, $P_n^2(N)-1-N=N^nQ(N)=0_n$,
   donc $1+N=(P_n(N))^2$ donc $\boxed{P_n(N)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}N^k}$ répond à la question.