TD ∗ Réduction : Trigonalisation et Nilpotence

1. Trigonalisation

1 Trigonalisation simultanée

1. Si $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ commutent, montrer qu'elles ont un vecteur propre en commun, puis qu'elles sont simultanément trigonalisables (ie avec les mêmes matrices de passages).
2. Si $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB=0$, montrer qu'elles sont simultanément trigonalisables.
3. Si $A,B,C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles $AB-BA=C$, $AC=CA$, $BC=CB$, montrer qu'elles sont simultanément trigonalisables.
4. Si $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB-BA=B$, montrer que B est nilpotente.
   Si, plus généralement, on a $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ tels que $AB-BA=\lambda A+\mu B$, montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

2 Avec la comatrice

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\tilde{A}=(\mathrm{Com}\,A)^\intercal$.

1. (a) Pour $I,J\in\mathscr{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)$, on note $A|_{I\times J}$ la sous-matrice de A d'indices de lignes dans I et de colonnes dans J. Montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$,
   $$\det(\lambda I_n+A)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{\substack{I\subset\llbracket 1,n\rrbracket\\|I|=n-j}}\det A|_{I^2}\right)\lambda^j.$$
   (b) En déduire une formule pour χ_A, retrouver ses cœfficients de degré n, $n-1$ et 0 et exprimer son cœfficient de degré 1 à l'aide de la comatrice.
2. (a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $\tilde{A}$.
   (b) Lorsque A est diagonalisable, quels sont les vecteurs propres de $\tilde{A}$?
   (c) Que dire de $C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC=CA=0$ si $\mathrm{rg}\,A=n-1$?
3. On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et on note $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Donner, en fonction des λ_i, l'expression des valeurs propres de $\tilde{A}$.

3 Centrale

1. Soient $A,B\in\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB=BA$. Montrer que $B\in\mathbb{K}[A]$ ou $A\in\mathbb{K}[B]$.
2. Le résultat subsiste-t-il dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$?

4 Centrale-Mines Ponts

Montrer que $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ont même polynôme caractéristique si et seulement si
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{tr}\,A^k=\mathrm{tr}\,B^k.$$

5 X

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}\,A^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$.
Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module <1.

2. Autour de la nilpotence

6 Mines-Ponts

Montrer que $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $\mathrm{tr}\,A^k=0$.

7 Inversion et nilpotence

Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente.

1. Montrer que I_n-N et I_n+N sont inversibles et calculer leurs inverses en fonction de N.
2. En considérant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer une matrice M dont le carré est égal à I_n+N.
   (*On pourra montrer que si P est un polynôme tel que $P(x)\underset{x\to0}{=}\mathrm{o}(x^n)$, alors il existe Q tel que $P=X^nQ$ à l'aide d'une division euclidienne.*)