Solution de 1 : X-ENS

On cherche à résoudre $T(u)=\lambda u$. Si on a une suite $u\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui convient, alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $u_{n+1}=\lambda u_n$.
Si $\lambda=0$, on a nécessairement $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n=0$, c'est-à-dire $u=(0)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Sinon, il vient alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0\lambda^n$ et comme pour tout $n\in\mathbb{Z}^-$,

$$v_{n+1}=u_{-n-1}=\frac{1}{\lambda}u_{-n}=\frac{1}{\lambda}v_n,$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{u_0}{\lambda^n}$ et $u_n=u_0\lambda^n$.
Par ailleurs, il est nécessaire que u soit bornée, ce qui impose $|\lambda|=1$.

Finalement, $\boxed{\text{tout } \lambda\in\mathbb{U} \text{ est valeur propre, de sous-espace propre associé la droite } \mathrm{Vect}(\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}.}$

Si F est un sous-espace de $\mathscr{B}$ de dimension finie stable par T, et T_F l'endomorphisme de F induit par T. On montre que T_F est diagonalisable pour en déduire qu'il existe une base de F formée de vecteur propre de T.
Malheureusement l'argument classique de l'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable ne tient pas ici.

Comme $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\chi_{T_F}=\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k}$ est scindé et on a (théorème de Cayley-Hamilton + lemme de décomposition des noyaux) :

$$F=\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^{m_k}.$$

Pour montrer que u_F est diagonalisable, on doit montrer que

$$F=\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F).$$

On va donc essayer de voir que pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, $\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^{m_k}=\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)$.
On pense bien sûr aux lemme classique des noyaux emboîtés.
Commençons par comparer $\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^2$ et $\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)$.
On a déjà $\mathrm{Ker}(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)\subset\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^2$.
Prenons $u\in\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^2$:

$$(T^2-2\lambda_k T+\lambda_k^2\,\mathrm{id}_F)(u)=(0)_n$$

donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $u_{n+2}-2\lambda_k u_{n+1}+\lambda_k^2u_n=0$.
On a alors $A,B\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(An+B)\lambda_k^n$.
On vérifie que c'est encore valable pour $n\leqslant 0$ par récurrence.
Or u est bornée et $|\lambda_k|=1$, donc $A=0$ et $u\in\mathrm{Vect}(\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}=\mathrm{Ker}(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)$.
Finalement, $\mathrm{Ker}(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)=\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^2$ et les noyaux itérés $K_m=\mathrm{Ker}(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)^m$ sont classiquement stationnaires à partir du rang 1.
Cela permet de conclure : on a bien

$$F=\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(T-\lambda_k\,\mathrm{id}_F)$$

donc T_F est diagonalisable : F possède une base formée de vecteurs propres de T_F donc de T, c'est-à-dire

$$\boxed{F \text{ possède une base formée de suites de la forme } (\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}.}$$

La réciproque est facile.

Solution de 2 : Mines

Cas : $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

u annule un polynôme scindé simple, l'endomorphisme u est donc diagonalisable. Tout sous-espace vectoriel possédant une base de vecteurs propres est stable et inversement.

Cas : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$E=\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}\left(u^2+u+\mathrm{Id}\right)$$

Si F est un sous-espace vectoriel stable alors posons

$$F_1=F\cap\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$$

et

$$F_2=F\cap\operatorname{Ker}\left(u^2+u+\mathrm{Id}\right)$$

Montrons $F=F_1\oplus F_2$.
Tout $x\in F$ peut s'écrire $x=a+b$ avec $a\in\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$ et $b\in\operatorname{Ker}\left(u^2+u+\mathrm{Id}\right)$.
Puisque $u(x)=a+u(b)\in F$ et $u^2(x)=a+u^2(b)\in F$, on a $a=\frac{1}{3}\left(x+u(x)+u^2(x)\right)\in F$ puis $b=x-a\in F$.
Ainsi $a\in F_1$, $b\in F_2$ et l'on a donc $F\subset F_1+F_2$.
Il est alors immédiat que l'on peut alors conclure $F=F_1\oplus F_2$.
Puisque $F_2\subset\operatorname{Ker}\left(u^2+u+\mathrm{Id}\right)$, pour $x\in F_2$ non nul $(x,u(x))$ est libre et $\operatorname{Vect}(x,u(x))$ est stable par u.
Cela permet d'établir que F_2 est la somme directe de sous-espaces vectoriels de la forme $\operatorname{Vect}(x,u(x))$ avec $x\neq 0$, $x\in\operatorname{Ker}\left(u^2+u+\mathrm{Id}\right)$.
Quant à F_1, il n'y a pas de condition à souligner puisque tout sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$ est stable par u.

Solution de 3 : X

Puisque u possède un polynôme annulateur non nul,

$$\dim\mathbb{K}[u]<+\infty$$

Or $\mathbb{K}[P(u)]\subset\mathbb{K}[u]$ et donc

$$\dim\mathbb{K}[P(u)]<+\infty$$

Par conséquent, l'endomorphisme $P(u)$ possède un polynôme annulateur non nul.

Solution de 4 : Décomposition de Dunford

- L'existence a été vue en cours : il suffit d'utiliser la supplémentarité des sous-espaces caractéristiques (le polynôme caractéristique étant scindé) : $E=\bigoplus_{i=1}^{p}\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\operatorname{id}_E)^{m_i}$.
  En posant d et n les endomorphismes stabilisant ces espaces et dont les endomorphismes induits sur $F_i=\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\operatorname{id}_E)_i^m$ sont $d_i=\lambda_i\operatorname{id}_{F_i}$ et $n_i=u_i-\lambda_i\operatorname{id}_{F_i}$, autrement dit, si on décompose $x=\sum_{i=1}^{p}x_i$ dans $E=\bigoplus_{i=1}^{p}F_i$,
  $$d(x)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i$$
  et
  $$n(x)=\sum_{i=1}^{p}(u(x_i)-\lambda_i x_i),$$
  on obtient bien d diagonalisable (prendre une base adaptée à la décomposition) et n nilpotent d'indice au plus $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} m_i$.
  On a de plus bien $u=d+n$ et d et n commutent car c'est vrai sur chacun des F_i.
- On montre ensuite ces endomorphismes d et n sont des polynômes en u, ce qui aidera à prouver l'unicité (et redonne leur commutativité). C'est la partie la plus difficile.
  En notant π_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i}F_j$, on remarque que $d=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\pi_i$. Il suffit donc de montrer que les projections π_i sont des polynômes en u.
  Il s'agit d'une conséquence de la démonstration du lemme de décomposition des noyaux appliqué à χ_u qui permet justement de prouver cette supplémentarité : si $i\in[\![1,p]\!]$, $P_i=(X-\lambda_i)^{m_i}$ étant premier avec $Q_i=\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{m_j}$, on a une relation de Bézout $P_iA_i+Q_iB_i=1$ qui, évaluée en u donne $P_i(u)\circ A_i(u)+Q_i(u)\circ B_i(u)=\operatorname{id}_E$ puis pour tout $x\in E$,
  $$x=\underbrace{P_i(u)\circ A_i(u)(x)}_{\in\operatorname{Ker}Q_i(u)=\bigoplus_{j\neq i}F_j}+\underbrace{Q_i(u)\circ B_i(u)(x)}_{\in F_i=\operatorname{Ker}P_i(u)}$$
  avec $\chi_u(u)=(P_iQ_i)(u)=0_{\mathscr{L}(E)}$ par le théorème de Cayley-Hamilton et $\operatorname{Ker}Q_i(u)=\bigoplus_{j\neq i}F_j$ par lemme de décomposition des noyaux.
  Alors, avec les mêmes notations que précédemment,
  $$x_i=Q_i(u)\circ B_i(u)(x)$$
  et $d(x)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(Q_iB_i)(u)(x)$ et
  $$d=\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_iQ_iB_i\right)(u)$$
  est bien un polynôme en u. Enfin, $n=u-d$ est aussi un polynôme en u.
- Si un autre couple (d',n') convient, d' commute avec n' donc avec $u=d'+n'$ donc avec tout polynôme en u et en particulier d. De même, n' commute avec n.
  Or $d-d'=n'-n$, et par commutativité, d et d' sont codiagonalisables donc $d-d'$ est diagonalisable et $n'-n$ est nilpotent (deux exercices classiques).
  Le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent étant l'endomorphisme nul, on conclut.

Solution de 5 : Centrale

1. Dans une base adaptée à l'écriture $E=V\oplus W$, la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux figurant les endomorphismes induits par u sur V et W. En calculant les polynômes caractéristiques par cette représentation matricielle, la relation $\chi=\chi'\chi''$ est immédiate.
2. Commençons par un résultat préliminaire : Si P est un polynôme irréductible unitaire et si P^α annule u alors le polynôme caractéristique χ de u s'écrit P^β.
   Raisonnons matriciellement. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\subset\mathscr{M}_n(C)$.
   On suppose que P^α annule A. Le polynôme minimal π de A divise P^α, il est donc de la forme P^γ avec $1\leqslant\gamma\leqslant\alpha$.

Les valeurs propres complexes de A sont exactement les racines de π donc les racines de P.
Les valeurs propres complexes de A sont aussi les racines de χ.
Enfin, le polynôme χ est réel et donc, que le polynôme P soit de la forme $X-\lambda$ ou de la forme X^2+pX+q avec des racines conjuguées, on peut écrire $\chi = P^\beta$.
Revenons au sujet. Le polynôme caractéristique de u étant annulateur et les polynômes $P_i^{\alpha_i}$ étant deux à deux premiers entre eux, on peut appliquer le lemme de décomposition des noyaux pour écrire

$$E = \bigoplus_i \operatorname{Ker}\left(P_i^{\alpha_i}(u)\right)$$

On peut introduire les endomorphismes u_i induits par u sur les espaces $E_i = \operatorname{Ker}\left(P_i^{\alpha_i}(u)\right)$. En notant χ_i le polynôme caractéristique de u_i, la question précédente donne

$$\chi = \prod_i x_i$$

Sachant $P_i^{\alpha_i}(u_i) = 0$, l'étude liminaire permet d'écrire $\chi_i = P_i^{\beta_i}$. On a donc simultanément

$$\chi = \prod_i P_i^{\alpha_j} \text{ et } \chi = \prod_i P_i^{\beta_i}$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, on a $\alpha_i = \beta_i$. On peut alors conclure

$$\dim \operatorname{Ker}\left(P_i^{\alpha_i}(u)\right) = \dim E_i = \deg\left(\chi_i\right) = \alpha_i \deg(P_i)$$

3. Supposons $\pi \neq \chi$. Le polynôme π s'écrit

$$\pi = \prod_i P_i^{\gamma_i} \text{ avec } \gamma_i \leqslant \alpha_i \text{ et } \sum_i \gamma_i < \sum_i \alpha_i$$

Par le lemme de décomposition des noyaux

$$E = \bigoplus_i \operatorname{Ker}\left(P_i^{\gamma_i}(u)\right)$$

Il est alors impossible que $\dim \operatorname{Ker}\left(P_i^k(u)\right) = k \deg(P_i)$ pour tout $k \leqslant \alpha_i$ car alors

$$\dim E = \sum_i \gamma_i \deg(P_i) < \sum_i \alpha_i \deg(P_i) = \deg(\chi) = \dim E$$

Inversement, supposons $\pi = \chi$. Commençons par établir que si P est un polynôme irreductible unitaire

$$\dim \operatorname{Ker}(P^\alpha(u)) = k \deg(P) \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Considérons v l'endomorphisme induit par u sur $F = \operatorname{Ker}(P^\alpha(u))$. On a $P^\alpha(v) = 0$ et le polynôme caractéristique de v est donc de la forme P^k avec $k \in N$. On en déduit $\dim F = k \deg(P)$.
Puisque $\pi = \chi$, on a pout tout i

$$\operatorname{Ker}\left(P_i^{\alpha_i - 1}(u)\right) \neq \operatorname{Ker}\left(P_i^{\alpha_i}\right)$$

(sinon, on pourrait définir un polynôme annulateur « plus petit » que π).
Par l'étude classique des noyaux itérés, on sait, pour v endomorphisme,

$$\operatorname{Ker}\left(v^k\right) \subset \operatorname{Ker}\left(v^{k+1}\right) \text{ et } \operatorname{Ker}\left(v^k\right) = \operatorname{Ker}\left(v^{k+1}\right) \Longrightarrow \forall \ell \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker}\left(v^{k+\ell}\right) = \operatorname{Ker}\left(v^k\right)$$

En considérant, $v = P_i(u)$, on obtient la succession

$$0 < \dim \operatorname{Ker}(P_i(u)) < \dim \operatorname{Ker}\left(P_i^2(u)\right) < \cdots < \dim \operatorname{Ker}\left(P_i^\alpha(u)\right) = \alpha \deg(P_i)$$

où chacune $\mathrm{des}\,\alpha$ dimensions est multiple de $\deg(P_i)$. On peut conclure

$$\forall k \leqslant \alpha_i,\ \dim \operatorname{Ker}\left(P_i^k(u)\right) = k \deg(P_i)$$

Solution de 6 : X-ENS : Endomorphismes simples

- (ii) $\Longrightarrow (i)$. Supposons χ_u irréductible. Soit F un sous-espace de E stable par u.
  Nous savons que si u_F désigne l'endomorphisme de F induit par u, alors χ_{u_F} divise χ_u.
  De l'hypothèse, on déduit que χ_{u_F} est égal à 1 ou χ_u.
  Il en résulte que $\dim F = \deg \chi_{u_F}$ vaut 0 ou n.
  Donc, F est réduit à $\{0\}$ ou est égal à E tout entier.
- $(i) \Longrightarrow (ii)$. Réciproquement, supposons que les seuls sous-espaces stables par u soient $\{0\}$ et E.
  Soit $x \neq 0$ et E_x le sous-espace engendré par les $u^k(x)$, où k parcourt $\mathbb{N}$.
  Par hypothèse, $E_x = E$ et $\left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ est une base de E.
  Si $P \in K[X]$ et $P(u)(x) = 0$ avec $\deg P \leqslant n-1$, la liberté de $\left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ impose $P = 0$.
  En particulier, π_u ne peut être de degré inférieur ou égal à $n-1$.
  Comme d'après le théorème de Cayley-Hamilton, π_u divise χ_u, on en déduit que $\pi_u = \chi_u$.
  Il suffit donc de démontrer que π_u est irréductible.
  Soit P un diviseur irréductible unitaire de π_u. Alors $\operatorname{Ker} P(u)$ est stable par u.
  S'il était égal à $\{0\}$, $P(u)$ serait injective et si on écrit $\pi_u = PQ$ avec $Q \in K[X]$, alors $P(u) \circ Q(u) = 0$ entraîne $Q(u) = 0$ ce qui est exclu car $\deg Q < \deg \pi_u$. On a donc par hypothèse $\operatorname{Ker} P(u) = E$, ce qui signifie que $P(u) = 0$ et $\pi_u \mid P$. Ainsi $\chi_u = \pi_u = P$ est irréductible.

Nous venons de montrer en particulier qu'un endomorphisme simple est cyclique.

Solution de 7 : X-ENS : Endomorphismes semi-simples

1. - On suppose u diagonalisable. On sait alors que χ_u est scindé.
   Soit F un sous-espace stable par u. Un résultat classique nous dit que F est engendré par des vecteurs propres de u. Comme u est diagonalisable, on peut compléter cette base de F en une base de vecteurs propres ce qui donne bien un supplémentaire stable.
   - Si χ_u est scindé et u est semi-simple, on considère $F = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ qui est un sous-espace stable par u. Il admet un supplémentaire G stable par u.
   En supposant que $\dim G \geqslant 1$ et en considérant une valeur propre de l'endomorphisme induit par u sur G, on aboutit à une contradiction au fait que F et G soient en somme directe, ce qui donne $F = E$ et u diagonalisable.
2. C'est nettement plus difficile.
   - On suppose u semi-simple. Supposons par l'absurde que $\pi_u = P^2 Q$ avec P unitaire non constant.
   Soit $F = \operatorname{Ker}\big(P(u)\big)$ qui est stable par u.
   Par hypothèse, F possède un supplémentaire G stable par u.
   On montre alors que PQ annule u pour aboutir à une contradiction.
   Comme $0_{\mathscr{L}(E)} = (P^2 Q)(u) = P(u) \circ (PQ)(u)$,
   $$(PQ)(u)(G) \subset \operatorname{Ker}\big(P(u)\big) = F.$$
   Or G est stable par u donc par $(PQ)(u)$ donc $(PQ)(u)(G) \subset F \cap G = \{0_E\}$.
   Il reste à voir que $(PQ)(u)(F) = Q(u) \circ P(u)(F) = \{0_E\}$, ce qui est facile avec la définition de F.
   Finalement, comme $E = F + G$, on a bien $(PQ)(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui contredit la minimalité de π_u.
   - On suppose maintenant que le polynôme minimal π_u de u est sans facteur carré :
   $$\pi_u = P_1 \cdots P_r$$
   où les P_i sont deux à deux distincts, unitaires et irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
   Soit F un sous-espace stable par u, u_F l'endomorphisme induit.
   Par le lemme de décomposition des noyaux,
   $$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u_F)).$$
   Comme $F_i = \operatorname{Ker}(P_i(u_F)) = F \cap \operatorname{Ker}(P_i(u))$, on va chercher à construire des supplémentaires G_i des F_i dans les $\operatorname{Ker}(P_i(u))$ et vérifier que $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_r$ est un supplémentaire de F stable par u.
   Pour construire G_i, l'idée est d'ajouter autant que faire se peu le plus petit sous-espace stable contenant un élément jusqu'à obtenir le supplémentaire de F_i dans $\operatorname{Ker}(P_i(u))$ recherché.
     - Soit $F_i = \operatorname{Ker}(P_i(u))$ et alors $G_i = \{0_E\}$, convient.
     - Soit ce n'est pas le cas et on peut trouver $x_1 \in \operatorname{Ker}(P_i(u)) \setminus F_i$. Le plus petit sous-espace contenant x_1 et stable par u est $E_{x_1} = \operatorname{Vect}\big(u^k(x_1)\big)_{k \in \mathbb{N}}$. C'est un sous-espace de $\operatorname{Ker}(P_i(u))$ stable par u et non réduit à 0_E car $x_1 \neq 0_E$. Comme dans la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton, on a $\big(u^k(x_1)\big)_{0 \leqslant k \leqslant d_1 - 1}$ base de E_{x_1} avec $d_1 = \dim E_{x_1}$ plus grand entier k tel que $\big(x_1, u(x_1), \ldots, u^{k-1}(x_1)\big)$ soit libre, ou le plus petit k tel que
     $$u^k(x_1) \in \operatorname{Vect}\big(x_1, u(x_1), \ldots, u^{k-1}(x_1)\big).$$
     Comme $P_1(u)(x_1) = 0_E$, $d_1 \leqslant \deg P_1$. On montre qu'il y a en fait égalité.
     Si u_1 est l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace stable E_{x_1}, son polynôme minimal divise le polynôme irréductible unitaire P_i annulateur de u_i. Il est donc égal à P_i donc $\deg P_i \leqslant \dim E_{x_1} = d_1$ (ce qui se voit par exemple par le fait que la polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, conséquence de Cayley-Hamilton.)
     Bref, $d_1 = \deg P_1$.
     Cela permet de voir que E_{x_1} et F_i sont en somme directe car si $E_{x_1} \cap F_i$ n'est pas réduit à 0, en prenant x non nul dans l'intersection, on montre comme précédemment que E_x est de dimension $\deg P_i = \dim E_{x_1}$, ce qui conduit à $E_x = E_{x_1} \subset F$ et à $x_1 \in F_i$ ce qui est contradictoire.
       - Soit $E_{x_1} \oplus F_1 = \operatorname{Ker} P_i(u)$ et $G_i = E_{x_1}$ convient,
       - soit l'inclusion est stricte et on peut réitérer l'opération. Comme $\operatorname{Ker} P_i(u)$ est de dimension fini, le procédé est fini et on finit par avoir
       $$F_1 \oplus E_{x_1} \oplus \cdots \oplus E_{x_q} = \operatorname{Ker} P_i(u).$$
       Alors $G_i = E_{x_1} \oplus \cdots \oplus E_{x_q}$ convient.

Solution de 8 : Endomorphismes cycliques : classique oral et écrit

1. L'ensemble I est le noyau du morphisme d'algèbres

$$\varphi : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto P(u) \in \mathscr{L}(E)$$

C'est donc un idéal de E. L'algèbre $\mathscr{L}(E)$ étant de dimension finie, φ ne peut être injectif et $I \neq \{0\}$. Nous savons alors qu'il existe un unique polynôme unitaire non nul π, appelé polynôme minimal de u, tel que $I = \pi\mathbb{K}[X]$.
Montrons aussi que I_x est un idéal. Soit P et Q dans I_x et A dans $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme nul est dans I_x, et

$$\begin{aligned}(P+Q)(u)(x) &= (P(u)+Q(u))(x) = P(u)(x)+Q(u)(x) = 0\\ (\mathrm{AP})(u)(x) &= A(u)\circ P(u)(x) = A(u)(P(u)(x)) = A(u)(0) = 0\end{aligned}$$

et on a bien $P+Q \in I_x$ et $AP \in I_x$. L'ensemble I_x est donc un idéal de $K[X]$, non réduit à $\{0\}$ puisque $I \subset I_x$: il existe donc π_x polynôme unitaire non nul tel que $I_x = \pi_x \mathbb{K}[X]$. Comme $\pi \in I_x, \pi_x$ divise π.
Le polynôme unitaire π_x est appelé polynôme minimal ponctuel de u en x.

2. Supposons $n = \dim E \geqslant 1$ (si $E = \{0\}, x = 0$ convient puisque $\pi = \pi_0 = 1$). Dans ces conditions, on a $\deg \pi \geqslant 1$. On va utiliser la décomposition de π en facteurs irréductibles.
   - Si π est irréductible, alors pour $x \neq 0, \pi_x$ est un diviseur de π distinct de 1, c'est nécessairement π.
   - Supposons que π est de la forme P^r avec P irréductible. Considérons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Pour $1 \leqslant i \leqslant n, \pi_{e_i}$ est de la forme P^{r_i} avec $1 \leqslant r_i \leqslant n$; si on note $s = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$, alors $s \leqslant r$ et $P^s(u)$ est nul en chaque e_i et donc $P^s(u) = 0$.
   Autrement dit $\pi \mid P^s$. Cela entraîne $r \leqslant s$, et finalement $r = s$: autrement dit, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\pi_{e_i} = P^r = \pi$.
   - Supposons π quelconque : on peut écrire
   $$\pi = P_1^{r_1} \cdots P_s^{r_s}$$
   avec $s \geqslant 1$, les P_i irréductibles deux à deux distincts, et les r_i entiers naturels non nuls. Posons pour $1 \leqslant i \leqslant s, Q_i = P_i^{r_i}$ et $E_i = \operatorname{Ker} Q_i(u)$. Comme $\pi(u) = 0$, le théorème de décomposition des noyaux nous assure que
   $$E = \operatorname{Ker} Q_1(u) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} Q_s(u) = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$$
   Chaque E_i est stable par u ; notons u_i l'endomorphisme de E_i induit par u. Comme pour tout $x \in E_i, Q_i(u)(x) = 0$, on a $Q_i(u_i) = 0$. Ainsi, le polynôme minimal de u_i, que nous noterons π_i est un diviseur de $Q_i = P_i^{r_i}$. Il est en fait égal à Q_i. En effet, si on avait $\pi_i = P_i^{r'_i}$ avec $r'_i < r_i$, alors le polynôme
   $$P = P_1^{r_1} \cdots P_{i-1}^{r_{i-1}} P_i^{r'_i} P_{i+1}^{r_{i+1}} \cdots P_s^{r_s}$$
   annulerait u (en effet $P(u)$ s'annule sur chaque E_j pour $j \neq i$, puisque si $x \in E_j$, $P_j^{r_j}(u)(x) = 0$ et s'annule aussi sur E_i, puisque si $x \in E_i, P_i^{r'_i}(u)(x) = 0$; comme E est somme directe des sous-espaces $E_i, P(u)$ est l'endomorphisme nul). Cela contredirait la minimalité de π.
   D'après ce qui précède, il existe $x_i \in E_i$ tel que le polynôme minimal ponctuel de u_i en x_i soit égal au polynôme minimal de u_i *i.e.* Q_i. Or le polynôme minimal ponctuel de u_i en x_i est aussi le polynôme minimal ponctuel de u en x_i puisque si $P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = P(u_i)(x)$. On a donc $\pi_{x_i} = Q_i$.
   Considérons $x = x_1 + \cdots + x_s$. On va montrer que $\pi_x = \pi$. On sait que $\pi_x(u)(x) = 0$. On a alors
   $$0 = \pi_x(u)(x) = \pi_x(u)(x_1) + \pi_x(u)(x_2) + \cdots + \pi_x(u)(x_s)$$
   Chaque E_i étant stable par u, on a $\pi_x(u)(x_i) \in E_i$ pour tout i et, comme la somme de ces sous-espaces est directe, $\pi_x(u)(x_i) = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$. On en déduit que $Q_i = \pi_{x_i}$ divise π_x et comme ces polynômes sont premiers entre eux deux à deux, $\pi = Q_1 \ldots Q_s$ divise π_x et finalement, avec la première question et le fait qu'ils soient unitaires, $\pi_x = \pi$.

3. Pour $x \in E$, on pose $E_x = \operatorname{Vect}\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$. C'est le plus petit sous-espace de E stable par u, contenant x.
Montrons pour commencer que la dimension de E_x n'est rien d'autre que le degré r du polynôme minimal ponctuel π_x. En effet, par définition la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)\right)$ est libre.
Notons W le sous-espace de dimension r qu'elle engendre.
C'est un sous-espace de E_x. On va montrer en fait que $W = E_x$.
Comme $\pi_x(u)(x) = 0$, la famille $(x, u(x), \ldots, u^r(x))$ est liée, donc $u^r(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)\right) = W$.
Cela prouve que W est stable par u (l'image d'un vecteur quelconque de la base de W est dans W).
Comme W contient x on a donc $E_x \subset W$ et finalement $W = E_x$. Cela montre, en particulier que E_x est de dimension r.
La question posée en découle aisément :

- Supposons u est cyclique. Il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$ donc tel que $\deg \pi_x = n$, où $n = \dim E$. On a alors $\deg \pi \geqslant n$ d'après la première question. Mais on sait par le théorème de Cayley-Hamilton que π divise le polynôme caractéristique χ_u de u. Ce dernier étant de degré n on a donc $\pi = \chi_u$.
- Réciproquement, supposons $\chi_u = \pi$. D'après la question précédente, il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi = \chi_u$. Pour un tel x on a
$$\dim E_x = \deg \pi_x = \deg \pi = \deg \chi_u = n$$
et donc $E_x =$ E. Ainsi u est cyclique.

Il découle directement de cet exercice qu'un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à la dimension n de l'espace E est cyclique. En effet, son polynôme minimal vaut X^n et est égal au polynôme caractéristique. C'est un exercice classique de démontrer cela directement : on sait que pour tout vecteur x en dehors de $\operatorname{Ker} u^{n-1}$, la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ est une base de E.

4. - Supposons (ii). Notons $\mathscr{B} = \left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ cette base de E.
On peut écrire $u^n(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$ avec $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. La matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est donc
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$
Si λ est une valeur propre de $u, M - \lambda I_n$ est au moins de rang $n-1$ puisque le bloc $(n-1) \times (n-1)$ en bas à gauche est inversible. $\mathrm{Donc} \dim \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n) \leqslant 1$ d'après le théorème du rang. En fait il y a égalité puisque λ est une valeur propre : $\operatorname{Ker}(u - \lambda$ Id) est de dimension 1.

Une autre possibilité consiste à utiliser le fait que M et $M^\top$ ont le même spectre et des espaces propres associés à une valeur propre λ donnée de même dimension (car $\operatorname{rg}(M - \lambda I_n) = \operatorname{rg}\left(M^\top - \lambda I_n\right)$). Or le système linéaire $M^\top X = \lambda X$ se résout très facilement et on constate que λ est valeur propre de $M^\top$ si et seulement si $\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1 \lambda - a_0 = 0$ (voir la remarque qui suit l'exercice) et l'espace propre associé est la droite engendré par le vecteur de coordonnées $\left(1, \lambda, \lambda^2 \ldots\ldots, \lambda^{n-1}\right)$.
- Supposons (i). Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et $n_1, \ldots, n_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs comme racines de χ_u. On note $\mathrm{F}_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i}$ l'espace caractéristique associé à λ_i. On sait qu'il est de dimension n_i. On note u_i l'endomorphisme de F_i induit par u et $v_i = u_i - \lambda_i$ Id la composante nilpotente de u_i. Par hypothèse on a $\dim \operatorname{Ker} v_i = \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}) = 1$. On en déduit que v_i est nilpotent d'indice maximal à savoir n_i. En effet, on a dim $\operatorname{Ker} v_i^{n_i - 1} \leqslant n_i - 1 < n_i$.
C'est une conséquence du lemme suivant (inégalité de Sylvester) :
Lemme : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, u et v dans $\mathscr{L}(E)$. Alors
$$\dim \operatorname{Ker} v \circ u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker} v.$$
Démonstration : On considère l'application linéaire
$$f : x \in \operatorname{Ker} v \circ u \longmapsto u(x) \in \operatorname{Ker} v$$
Elle est bien définie et son noyau est $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} u$. D'après le théorème du rang,
$$\dim \operatorname{Ker} v \circ u = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker} v.$$
■
Pour tout i, on peut choisir $x_i \in \mathrm{F}_i$ tel que $v_i^{n_i - 1}(x_i) \neq 0$. Posons alors $x = x_1 + \cdots + x_r$.
Montrons que $\left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ est libre, ce qui achèvera la démonstration.
Une relation de liaison se traduit par $P(u)(x) = 0$, avec $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg P \leqslant n-1$.
On a donc, par linéarité,
$$0 = P(u)(x) = P(u)(x_1) + \cdots + P(u)(x_r)$$
avec $P(u)(x_i) \in \mathrm{F}_i$ pour tout i.
Comme la somme des F_i est directe, $P(u)(x_i) = 0$, c'est-à-dire $P(u_i)(x_i) = 0$ pour tout i.
Comme $\left(x_i, v_i(x_i), \ldots, v_i^{n_i - 1}(x_i)\right)$ est une base de F_i on en déduit que $P(u_i) = 0$.
Or le polynôme minimal de u_i est $(X - \lambda_i)^{n_i}$ puisque celui de v_i est X^{n_i} (en effet, v_i est nilpotent et $v_i^{n_i - 1} \neq 0$).
On en déduit que $(X - \lambda_i)^{n_i}$ divise P. Finalement $\chi_u \mid P$ et pour des raisons de degré, il vient nécessairement $P = 0$ ce qui prouve la liberté de $\left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$.

En reprenant les notations précédentes lorsque u est supposé cyclique avec $= E_x = \operatorname{Vect}\left(x, \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ et
$$u^n(x) = a_0 x + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x),$$

il apparaît que la matrice de u dans la base $\left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

qui est la matrice compagnon du polynôme $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$. Dans ces conditions on a

$$\chi_u = \pi_u = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$$

Ce calcul de polynôme caractéristique est la clef d'une preuve du théorème de Cayley-Hamilton : on se donne u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $x \in E$ non nul. On désire montrer que $\left[\chi_u(u)\right](x) = 0$. On considère $E_x = \operatorname*{Vect}_{k \in \mathbb{N}} u^k(x)$ et u_x l'endomorphisme induit par u sur E_x. Nous savons que χ_{u_x} divise χ_u. Si on note $r = \dim E_x$, $\left(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)\right)$ est une base de E_x. Si on écrit $u^r(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{r-1} u^{r-1}(x)$, on a alors $\chi_{u_x} = X^r - a_{r-1}X^{r-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ et

$$\chi_{u_x}(u)(x) = u^r(x) - a_{r-1} u^{r-1}(x) - \cdots - a_1 u(x) - a_0 x = 0$$

On conclut que $\chi_u(u)(x) = 0$.

Les exercices suivants demandent des connaissances sur les fonctions continues sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution de 9 : X-ENS : Topologie maticielle

- $\boxed{\text{L'adhérence des matrices diagonalisable dans } \mathbb{C} \text{ est } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$: il s'agit de la très classique propriété de densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
  Il suffit pour cela de trigonaliser une matrice (on peut) et de perturber les cœfficients diagonaux en ajoutant des termes de la forme $\dfrac{\alpha}{k}$ pour obtenir des cœfficients diagonaux tous distincts : on obtient alors une suite de matrices diagonalisables qui tend vers la matrice de départ.
- $\boxed{\text{Dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\text{, l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables.}}$
  En effet, si une matrice est trigonalisable, on construit comme dans $\mathbb{C}$ une suite de matrice diagonalisables dont c'est la limite.
  Réciproquement, donnons-nous une suite $(A_p)_p$ de matrices réelles diagonalisables convergente vers A et montrons que A est trigonalisable.
  Pour cela, on utilise l'indication facile à prouver (le sens indirect est immédiat car toute racine complexe est alors réelle, le sens direct s'obtient en minorant une forme factorisée de $P(z)$).
  On a alors pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $p\in\mathbb{N}$, $|\mathrm{Im}\,z|^n \leqslant \left|\chi_{A_p}(z)\right|$ et par continuité de $A\mapsto\chi_A$, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}\,z|^n \leqslant \left|\chi_A(z)\right|$ ce qui assure que A est trigonalisable.
- Pour l'intérieur, c'est plus délicat. L'exemple simple

$$\begin{pmatrix}0 & 1/p\\ 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[p\to+\infty]{}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

montre que la matrice nulle, diagonalisable, est limite d'une suite de matrices non diagonalisables, donc la matrice nulle n'est pas dans l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables. S'inspirant de cet exemple, on peut penser qu'une matrice diagonalisable ayant au moins une valeur propres double n'est pas intérieure à l'ensemble des matrices diagonalisables. Soit en effet M une telle matrice ; elle s'écrit

$$M = PDP^{-1}$$

avec P inversible et D diagonale, et où l'on peut supposer $D_{1,1}=D_{2,2}=\lambda$. Soit $T_p = D+\dfrac{1}{p}E_{1,2}$ (les coefficients de T_p sont ceux de D, sauf le coefficient $(1,2)$). T_p n'est pas diagonalisable (le rang de $T_p-\lambda I_n$ est $n-m_\lambda+1$ où m_λ est le nombre d'apparitions de λ sur la diagonale, c'est-à-dire la multiplicité de λ. Donc la dimension de $\mathrm{Ker}(T_p-\lambda I_n)$ est $m_\lambda-1$, ce qui fait que T_p n'est pas diagonalisable). Comme

$$PT_pP^{-1}\xrightarrow[p\to+\infty]{}PDP^{-1}=M$$

M est dans l'adhérence de l'ensemble des matrices non diagonalisables, elle n'est donc pas dans l'intérieur des matrices diagonalisables.
On conclut provisoirement que :

$\boxed{\text{L'intérieur dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ de l'ensemble des matrices diagonalisables est inclus dans l'ensemble des matrices ayant } n \text{ valeurs propres distinctes}}$

L'inclusion réciproque est le passage délicat. Soit (M_p) une suite de matrices convergeant vers une matrice M. On suppose que M a n valeurs propres distinctes. Montrons qu'alors, à partir d'un certain rang, M_p a elle aussi n valeurs propres distinctes. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de M. Soit $\delta>0$, et supposons que M_p n'ait pas de valeur propre dans le disque $D(\lambda_1,\delta)$. Le polynôme caractéristique de M_p s'écrit

$$\chi_p(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-\pi_{i,p})$$

où les $\pi_{i,p}$ sont les valeurs propres de M_p, comptées avec leur multiplicité. On aurait, pour tout i, $|\pi_{i,p}-\lambda_1|\geqslant\delta$, donc

$$|\chi_p(\lambda_1)|\geqslant\delta^n$$

Or, par continuité du déterminant,

$$\chi_p(\lambda_1)=\det(\lambda_1 I_n-M_p)\xrightarrow[p\to+\infty]{}\det(\lambda_1 I_n-M)=0$$

Donc, à partir d'un certain rang,

$$|\chi_p(\lambda_1)| < \delta^n$$

ce qui permet de conclure que, pour tout $\delta > 0$, il existe un rang à partir duquel M_p a au moins une valeur propre dans le disque $D(\lambda_1, \delta)$. Idem pour les autres λ_i. Choisissons alors δ strictement inférieur à la moitié de la plus petite distance entre deux λ_i :

$$0 < \delta < \frac{1}{2} \min\{|\lambda_i - \lambda_j| \ ; \ i \neq j\}$$

A partir d'un certain rang, M_p a au moins une valeur propre dans chacun des $D(\lambda_i, \delta)$, or ces disques sont disjoints, donc M_p a au moins n valeurs propres distinctes, donc M_p est diagonalisable. Il n'existe donc pas de suite de matrices non diagonalisables qui converge vers M.

Donc M n'appartient pas à l'adhérence de l'ensemble des matrices non diagonalisables.

Donc M appartient à l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.

L'intérieur dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes

Remarque : Il y a bien d'autres manières d'aborder cette question. Ici, on a évité de se poser des problèmes de continuité de l'application qui à une matrice associe son polynôme caractéristique, de « continuité » des racines d'un polynôme...

- Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le fait que l'ensemble des matrices diagonalisables ayant n valeurs propres distinctes est ouvert peut se faire plus facilement grâce à l'ordre. En effet, si $a_1 < \ldots < a_n$ sont les n valeurs propres de A, on choisit b_k dans $]a_k, a_{k+1}[$ et on utilise la continuité de

$$A \longmapsto (P_A(b_1), \ldots, P_A(b_{n-1})).$$

pour conclure.

Solution de 10 : X-ENS : Topologie des classes de similitudes

1. Si B est semblable à A alors A et B ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal. On a donc $\chi_A = \chi_B$ et aussi $\pi_A(B) = \pi_B(B) = O_n$.
   Inversement, si $\pi_A(B) = O_n$ alors B est diagonalisable. En effet, π_A est simplement scindé puisqu'on suppose A est diagonalisable. Si de plus $\chi_A = \chi_B$ alors A et B ont les mêmes valeurs propres comptées avec multiplicité. Les matrices A et B sont donc diagonalisables semblables à une même matrice diagonale, elles sont semblables entre elles.
2. L'application $\chi : M \mapsto \chi_M$ de $\mathcal{M}_n(C)$ vers $C_n[X]$ est continue.
   En effet, les coefficients de χ_M sont des polynômes en les coefficients de M.
   On en déduit que l'ensemble $\chi^{-1}(\{\chi_A\})$ est une partie fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue.
   Aussi, l'application $\pi_A : M \mapsto \pi_A(M)$ de $\mathcal{M}_n(C)$ vers lui-même est continue par opérations sur les fonctions continues.
   On en déduit que l'ensemble $\pi_A^{-1}(\{O_n\})$ est fermée.
   Par intersection, la classe de similitude de A qui peut se décrire comme $\chi^{-1}(\{\chi_A\}) \cap \pi_A^{-1}(\{O_n\})$ est fermée.
3. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(C)$ est assurément trigonalisable (son polynôme caractéristique est nécessairement scindé sur C).
   Il existe donc au moins une matrice triangulaire supérieure dans sa classe de similitude.
4. En notant $t_{i,j}$ le coefficient général de T, le coefficient général de $D_k^{-1} T D_k$ est $k^i t_{i,j} k^{-j} = t_{i,j} k^{i-j}$.
5. Pour $i < j$,
   $$t_{i,j} k^{i-j} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$
   Pour $i = j$,
   $$t_{i,j} k^{i-j} = t_{i,i} \xrightarrow[k \to +\infty]{} t_{i,i}$$
   Pour $i > j$,
   $$t_{i,j} k^{i-j} = 0 \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$
   On a donc $D_k^{-1} T D_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} D = \operatorname{diag}(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})$. Or les matrices $D_k^{-1} T D_k$ sont semblables à T donc à A. La suite $(D_k^{-1} T D_k)_{k \in \mathcal{N}*}$ apparaît comme une suite convergente d'éléments du fermé qu'est la classe de similitude de A, sa limite D est donc aussi élément de cette classe de similitude.
   Ainsi, il existe une matrice diagonale dans la classe de similitude de A : la matrice A est diagonalisable.
6.
   - Si A est diagonalisable dans C alors toute limite A_∞ d'une suite de la classe de similitude de A est semblable à A dans $\mathcal{M}_n(C)$. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(C)$ telle que $P^{-1} A P = A_\infty$. On a alors $AP = PA_\infty$.
     En introduisant les parties réelles et imaginaires de P, on peut écrire $P = Q + \mathrm{i}R$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
     L'identité $AP = PA_\infty$ avec A et A_∞ réelles entraîne $AQ = QA_\infty$ et $AR = RA_\infty$.
     Puisque la fonction polynôme $t \mapsto \det(Q + tR)$ n'est pas nulle (car non nulle en i), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P' = Q + tR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et pour cette matrice $AP' = P'A_\infty$. Ainsi, les matrices A et A_∞ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Si A n'est pas diagonalisable dans C, il existe une valeur propre complexe λ pour laquelle $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \neq \mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)$.
     Pour $X_2 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2) X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$.
     - Si $\lambda \in \mathbb{R}$, il suffit de reprendre la démonstration qui précède.
     - Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on peut écrire $\lambda = a + \mathrm{i}b$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.
       Posons $X_3 = \bar{X}_1$ et $X_4 = \bar{X}_2$.
       La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre car $\lambda \neq \bar{\lambda}$.
       Introduisons ensuite $Y_1 = \mathrm{Re}(X_1)$, $Y_2 = \mathrm{Re}(X_2)$, $Y_3 = \mathrm{Im}(X_1)$ et $Y_4 = \mathrm{Im}(X_2)$.
       Puisque $\mathrm{Vect}_C(Y_1, \dots, Y_4) = \mathrm{Vect}_C(X_1, \dots, X_4)$, la famille $(Y_1, \dots, Y_4)$ est libre et peut donc être complétée en une base.
       On vérifie par le calcul $\begin{cases} AY_1 = aY_1 - bY_3 \\ AY_2 = aY_2 - bY_4 + Y_1 \\ AY_3 = aY_3 + bY_1 \\ AY_4 = bY_2 + aY_4 + Y_3 \end{cases}$ et on obtient que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice
       $$\begin{pmatrix} T & * \\ O & B \end{pmatrix}$$
       avec
       $$T = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \mathrm{diag}(p, 1, p, 1, \dots 1)$, on obtient

$$P_p^{-1} T P_p \to \begin{pmatrix} T_\infty & \psi' \\ O & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

avec

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Or dans $\mathcal{M}_n(C)$, la matrice A_∞ est semblable est à $\mathrm{diag}\left(\lambda, \lambda, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}, B\right)$ qui n'est pas semblable à A pour des raisons de dimensions analogues à ce qui a déjà été vu.

Les matrices réelles A et A_∞ ne sont pas semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni a fortiori dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que la classe de similitude de A n'est pas fermée