TD ∗ Réduction et polynômes

1 X-ENS

Soit $\mathcal{B} = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},\ u \text{ bornée}\right\}$ et $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
Que dire d'un sous-espace de dimension finie stable par T ?

2 Mines

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}$.
   Décrire les sous-espaces stables de u.
2. Même question avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3 X

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque.

Soit u un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur non nul.
Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $P(u)$ admet-il un polynôme annulateur non nul ?

4 Décomposition de Dunford

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $m \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Montrer l'existence d'un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que

(i) $u = d + n$;

(ii) d et n commutent ;

(iii) d est diagonalisable et n est nilpotent.

Vérifier en outre que d et n sont des polynômes en u.

5 Centrale

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note χ le polynôme caractéristique de u.

1. Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de E stables par u et tels que $E = V \oplus W$. On note χ' et χ'' les polynômes caractéristiques des endomorphismes induits par u sur V et W. Montrer $\chi = \chi'\chi''$.
2. On considère la décomposition en facteurs irréductibles $\chi = \prod\limits_i P_i^{\alpha_i}$.
   Montrer que pour tout i, $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(P_i^{\alpha_i}(u)\right)\right) = \alpha_i \deg P_i$.
3. Montrer le polynôme minimal de u est égal à χ si, et seulement si, pour tout $k \leqslant \alpha_i$, $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(P_i^k(u)\right)\right) = k \deg P_i$.

6 X-ENS : Endomorphismes simples

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est **simple** lorsque les seuls sous-espaces de E stables par u sont triviaux.
Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) u est simple ;

(ii) Le polynôme caractéristique χ_u de u est irréductible sur $\mathbb{K}$.

7 X-ENS : Endomorphismes semi-simples

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **semi-simple** si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable.

1. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (i) u est diagonalisable ;
   (ii) χ_u est scindé et u est semi-simple.
2. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (i) u est semi-simple ;
   (ii) le polynôme minimal π_u de u est sans facteur carré.

8 Endomorphismes cycliques : classique oral et écrit

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On définit

$$I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\} \quad \text{et} \quad I_x = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}.$$

1. Montrer l'existence de polynômes unitaires non nuls π et π_x tels que $I = \pi\mathbb{K}[X]$ et $I_x = \pi_x\mathbb{K}[X]$. Montrer que π_x divise π.
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi$.
   Indication : utiliser la décomposition de π en irréductibles et le lemme de décomposition des noyaux.
3. On dit que u est **cyclique** s'il existe $x \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}\left(u^k(x)\right)_k \in \mathbb{N}$.
   Montrer que u est cyclique si et seulement si $\pi = \chi_u$.
4. Montrer que u est cyclique si et seulement si les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.

Les exercices suivants demandent des connaissances sur les fonctions continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

9 X-ENS : Topologie maticielle

1. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Pour l'adhérence, on pourra vérifier que si P est un polynôme réel unitaire de degré n, alors il est scindé si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}\, z|^n \leqslant |P(z)|$.

10 X-ENS : Topologie des classes de similitudes

On appelle classe de similitude d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices semblables à A.

1. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
   (a) Montrer que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à A si, et seulement si,
   $$\chi_A = \chi_B \quad \text{et} \quad \pi_A(B) = 0_n$$
   (b) En déduire que la classe de similitude d'une matrice diagonalisable est une partie fermée.
2. Inversement, on suppose que la classe de similitude d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une partie fermée.
   (a) Montrer que cette classe de similitude contient au moins une matrice triangulaire supérieure T.
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$. On introduit la matrice diagonale $D_k = \mathrm{diag}\left(k, k^2, \ldots, k^n\right)$. Calculer $D_k T D_k^{-1}$.
   (c) Établir que A est diagonalisable.
3. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est fermée ?