

1. Généralités sur les groupes

1 Mines-Ponts Soit $(G, *)$ un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer que $(G, *)$ est abélien.
2. Soient H un sous-groupe strict de $(G, *)$, $a \in G \setminus H$. Montrer que $H \cup aH$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
3. Si G est fini, en créant par récurrence une suite de sous-groupe de G de cardinal une puissance de 2, montrer que le cardinal de G est une puissance de 2.
4. On veut retrouver le résultat précédent par une technique pour le moins inattendue. On admet que l'ensemble des entiers modulo 2 : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ forme un corps pour les lois d'addition et de multiplication modulo 2.
En interprétant G comme un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(G, *)$ est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.
Retrouver en particulier le résultat de la question précédente.

2 Centrale Soit $(G, *)$ un groupe. On suppose que le cardinal de G s'écrit pq , avec q premier et $p < q$. Montrer que G contient au plus un sous-groupe de cardinal q .

- 3**
1. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
 2. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.
 3. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{U}_n, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

4 ENS Soit $(G, *)$ un groupe, $\text{Aut}(G)$ l'ensemble de ses automorphismes.

1. Montrer que $(\text{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.
2. Déterminer les groupes finis tels que $\text{Aut}(G)$ soit réduit à un élément.

5 X – Groupe dérivé Soit G un groupe. Pour $(a, b) \in G^2$, on note $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. On note D_G le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $[a, b]$, ie le plus petit sous-groupe de G contenant les éléments de la forme $[a, b]$.

1. Montrer que $\forall g \in G, \quad gD_Gg^{-1} = D_G$.
2. Montrer que $\forall g \in G, \quad gD_G = D_Gg$.
3. On pose $\mathcal{Q}_G = \{xD_G; x \in G\}$.
(a) Montrer que $\mathcal{Q}_G$ est une partition de G .

- (b) Montrer que la fonction $(xD_G, yD_G) \mapsto (xy)D_G$ est convenablement définie et munit $\mathcal{Q}_G$ d'une structure de groupe, puis montrer que $x \mapsto xD_G$ est un morphisme de G dans $\mathcal{Q}_G$.
- (c) Montrer que $\mathcal{Q}_G$ est abélien.

6 X-ENS – Théorème de Sylow Soit p un nombre premier et k un entier naturel non nul. Soit G un groupe de cardinal $p^k m$ avec $p \nmid m$. Il s'agit de montrer que G a un sous-groupe de cardinal p^k .

1. Traiter le cas $m = 1$ puis le cas où G est cyclique.
On définit $M = \{A \subset G, |A| = p^k\}$.
2. Montrer que p ne divise pas le cardinal de M .
On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur M en posant pour A_1, A_2 dans M

$$A_1 \sim A_2 \iff \exists g \in G, A_1 = gA_2.$$

3. Montrer qu'il existe une classe d'équivalence de cardinal non divisible par p .
On prend A un représentant de cette classe, et on pose $H = \{g \in G, gA = A\}$.
4. Montrer que H est un sous-groupe de G de cardinal p^k .

2. Groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

7 CNS pour que $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ soit cyclique

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si $a \wedge b = 1$.

8 Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Montrer qu'il existe a divisant n vérifiant $H = \langle \bar{a} \rangle$.
2. Observer que si $d \mid n$, il existe un unique sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ de cardinal d .
3. Justifier que si $d \mid n$, le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ possède exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d (avec φ la fonction indicatrice d'Euler).
4. Montrer

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$$

3. Groupe symétrique

9

Déterminer tous les morphismes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{\pm 1\}, \times)$.

10

Théorème de Cayley¹

En s'intéressant aux translations, démontrer le théorème de Cayley qui affirme que tout groupe fini d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

11

ENS

1. Quel est le nombre minimal de permutations nécessaires pour engendrer $\mathfrak{S}_n$?
2. Si σ est une permutation, si $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ sont les orbites de σ , on note

$$N(\sigma) = \sum_{i=1}^p (|\Omega_i| - 1)$$

Montrer que, si τ est une transposition,

$$N(\tau\sigma) = N(\sigma) \pm 1$$

3. Quel est le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendrer $\mathfrak{S}_n$?

12

X-ENS – Groupe résoluble

Soit G un groupe. On note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ avec x et y dans G . On note D^n la n^{e} itérée de l'opération D et on dit que G est résoluble lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $D^n(G) = \{e\}$.

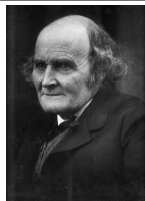
1. On suppose qu'il existe deux groupes N et H et deux morphismes $i : N \rightarrow G$ et $s : G \rightarrow H$ avec i injectif, s surjectif et $\text{Im } i = \text{Ker } s$.

Montrer que G est résoluble si et seulement si N et H le sont.

2. Montrer que $\mathfrak{A}_5$ est engendré par les 3-cycles, puis que $D(\mathfrak{A}_5) = \mathfrak{A}_5$ puis, à l'aide du morphisme de signature, que $\mathfrak{S}_5$ n'est pas résoluble.

La notion de groupe résoluble a pour origine la théorie de Galois. Le fait que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ne soit pas résoluble pour $n \geq 5$ traduit l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation polynomiale générale de degré ≥ 5 .

1.



Arthur Cayley (1821 - 1895, Angleterre) est un avocat devenu mathématicien, anglais. Très prolifique, il introduit en particulier les matrices et les opérations sur celles-ci comme nous les étudions aujourd'hui. Il démontre le théorème de Cayley-Hamilton (au programme de spé) en dimension 2 et 3.