

1. Suites de fonctions

Solution de 2 : Applications

1. Vu en cours : les fonctions polynomiales.

2. Ce sont les fonctions continues. Il suffit de choisir P_n tel que $\|f - P_n\|_{\infty, [-n, n]} \leq \frac{1}{2^n}$.

3. Appliquer le théorème de Weierstraß à $g : x \mapsto f(\sqrt{x})$.

4. La CNS est $f(0) = 0$.

Si $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0, appliquer la question précédente à $h : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ prolongée en 0.

Sinon, approcher uniformément f par P et appliqué le raisonnement précédent à $Q = P - P(0)$.

Solution de 3 : Preuve du théorème de la double limite

Si $a \in I$, on est ramené au théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge. On commence par montrer qu'elle est bornée pour appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit V un voisinage de a sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I \cap V$, $|b_n| \leq |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$.

On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$.

On suppose dorénavant que $n \geq N$.

On a aussi un voisinage W_n de a sur lequel $|b_n - f_n(x)| \leq 1$.

En prenant $x_n \in I \cap V \cap W_n$, on tire $|b_n| \leq 2 + |f(x_n)|$.

Mais comme les f_n convergent en a , elle sont bornées au voisinage de a donc par convergence uniforme, f est aussi bornée (disons, par M) au voisinage de a .

On obtient donc, pour $n \geq N$, $|b_n| \leq 2 + M$ et donc (b_n) est bornée.

Par théorème de Bolzano-Weierstraß, on en extrait une suite convergente : $b_{\varphi(n)} \rightarrow b$.

On montre alors que $b_n \rightarrow b$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$|b_n - b| \leq |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| + |f_{\varphi(n)}(x) - b_{\varphi(n)}| + |b_{\varphi(n)} - b|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a un voisinage V' de a sur lequel, à partir d'un rang N , $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$. Comme $\varphi(n) \geq n$, on a alors aussi $|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$.

Puis des voisinages W'_n et W''_n de a sur lesquels $|b_n - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ et $|b_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ respectivement.

Puis un rang N' à partir duquel $|b_{\varphi(n)} - b| \leq \frac{\varepsilon}{5}$.

Finalement, en prenant $n \geq \max(N, N')$ et $x \in I \cap V' \cap W'_n \cap W''_n$, alors tire $|b_n - b| \leq \varepsilon$.

Ainsi, $b_n \rightarrow b$.

On prolonge les f_n par continuité en a en posant $f_n(a) = b_n$, et on pose $f(a) = b$. Les f_n ainsi prolongées sont continues en a et convergent uniformément vers f (pas de problème en a car $b_n \rightarrow b$), qui est aussi continue en a , donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$.

Solution de 4 : X-ENS

1. Découper $[a, b]$ en une subdivision régulière de pas inférieur à $\frac{\varepsilon}{3k}$ puis, pour $x \in [a, b]$, utiliser x' dans la subdivision proche de x et découper $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| + |f(x') - f(x)|$
2. Pour $x, y \in [\alpha, \beta] \subset]a, b[$ avec $x < y$, utiliser l'inégalité des trois pentes pour les cordes entre a et x , x et y , b et β pour obtenir la lipschitzianité de f_n sur $[\alpha, \beta]$ et se ramener à la question précédente.

2. Séries de fonctions

Solution de 5 :

1. Utiliser le théorème des accroissements finis ou une écriture sous forme intégrale. CN sur tout segment.
2. Justifier qu'une limite finie ou non existe et la minorer par une somme partielle (comme pour ζ en 1...)
Ou utiliser une écriture de f_n sous forme intégrale.

Solution de 6 : Mines-Ponts

1. Pour $|x| \geq 1$, la série est grossièrement divergente.
Pour $|x| < 1$,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et la série est absolument convergente.

La fonction S est définie sur $] -1, 1[$.

Posons $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n}$. Appliquons le théorème de continuité des séries de fonctions.

H1 La série $\sum u_n$ converge simplement.

H2 Les fonctions u_n sont continues.

H3 Pour tout $a \in [0, 1[$, $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq a^n$, ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout segment de $] -1, 1[$.

Par théorème, la fonction S est continue.

2. On a déjà $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} S(0) = \frac{1}{2}$.

Pour $x \in [0, 1[$, une solution plutôt efficace est d'utiliser une comparaison série-intégrale pour

arriver à $S(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\ln 2}{\ln x} \sim \frac{\ln 2}{x-1}$.

On peut aussi y arriver un peu plus douloureusement avec la méthode suivante, intéressante.

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)} \right).$$

Puisque $\sum_{p \geq 0} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$ converge et $\sum_{n \geq 1} \sum_{p=0}^{+\infty} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$ aussi, on peut permuter les deux sommes en vertu du théorème de Fubini et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}.$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_p(x)$$

avec

$$u_p(x) = x^{p+1} \frac{1-x}{1-x^{p+1}}$$

pour $x \in [0, 1[$.

La fonction u_p est continue sur $[0, 1[$ et se prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = \frac{1}{p+1}$.

Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum (-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left| \sum_{k=p+1}^{\infty} (-1)^k u_k(x) \right| \leq u_{p+1}(x)$$

Une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leq \frac{1}{p+2}$.

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln(2)$$

et, finalement,

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln(2)}{1-x}.$$

Solution de 7 : X-ENS

FGN 5 2.4

On pose $v_n(x) = \sin(\sin(\dots(\sin x)\dots)) \in [-1, 1]$ pour $n \geq 1$.

Comme $\sin x$ est du signe de x sur $[-1, 1]$, $v_n(x)$ est du signe de $v_1(x)$: la série est alternée.

De l'inégalité classique $|\sin x| \leq |x|$, on tire la décroissance de $(|u_n(x)|)_n$, qui est minorée par 0 elle converge donc vers ℓ tel que $|\sin \ell| = |\ell|$.

Par étude de $\sin - \text{id}$ et $\sin + \text{id}$, on tire $\ell = 0$: le TSSA s'applique et donne la convergence simple.

Pour l'absence de convergence normale, on remarque que $\|u_n\|_{\infty} = v_{n-1}(1) := a_n$. On cherche un équivalent de a_n .

Pour cela, comme $a_n \rightarrow 0$ et $a_{n+1} = \sin a_n = a_n - \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)$, on remarque que pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha} = a_n^{\alpha} \left(\left(1 - \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2) \right)^{\alpha} - 1 \right) = a_n^{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha a_n^2}{6} + o(a_n^2) - 1 \right) \sim -\frac{\alpha}{6} a_n^{\alpha+2}$$

Pour avoir un équivalent constant, on choisit $\alpha = -2$ et comme $\sum \frac{1}{3}$ diverge, par sommation dans le cas de divergence,

$$a_n^{-2} - a_n^{-2} = \sum_{k=2}^{n-2} (a_{k+1}^{-2} - a_k^{-2}) \sim \frac{n-3}{3} \sim \frac{n}{3}$$

Et comme $a_n \rightarrow 0$, on tire $a_n^{-2} \sim \frac{n}{3}$ puis $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ ce qui permet bien de conclure l'absence de convergence normale.

Pour la convergence uniforme, par le TSSA, $\forall x \in \mathbb{R}, |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq a_{n+1} \rightarrow 0$ permet de conclure.

Solution de 8 : X-ENS

FGN 5 2.35

1. Théorème de la double limite appliqué à $g_k : x \mapsto \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)z^k}{k!x^k} \mathbb{1}_{[k,+\infty[}(x)$: convergence simple vers $\exp$.
 2. Récurrence sur k .
 3. Séparer dans $|f_n(z) - \exp z|$ les termes d'indices $\leq n$ et $> n$ et utiliser la question précédente.
-