

1. Suites de fonctions

1 Preuve du théorème de Weierstraß par les polynômes de Bernstein

Soit f continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. On définit les fonctions polynômes de Bernstein associées à f , pour tout $n \in \mathbb{N}$, définie sur $[0, 1]$, par $B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u)$ où $u : x \mapsto 1$, $B_n(\text{id})$, $B_n(v)$ où $v : x \mapsto x^2$.
2. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel si $x, x' \in [0, 1]$, $|x - x'| \leq \eta \implies |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $x \in [0, 1]$, on note $A_x = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \eta \right\}$ et B_x le complémentaire de A_x dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

(b) Montrer que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k \in A_x} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in B_x} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \frac{(k-nx)^2}{n^2 \eta^2} x^k (1-x)^{n-k}.$$

(c) Conclure.

3. Et sur un segment $[a, b]$?

2 Applications

1. Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ limites uniformes sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes réels.
2. Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que toute fonction f continue $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales paires.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur $[0, 1]$ soit limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales impaires.

3 Preuve du théorème de la double limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $a \in \bar{I}$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_n$.

1. Montrer que si $a \in I$, on a bien $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$ en appliquant un théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge.

2. Montrer qu'il existe un rang N tel que si $n \geq N$, il existe un voisinage de a (qui dépend de n) sur lequel $|b_n| \leq 2 + |f(x)|$.
3. En déduire que (b_n) est bornée et qu'elle a une valeur d'adhérence b .

Soit φ une extractrice telle que $b_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$.

4. Montrer que $b_n \rightarrow b$ et conclure.

4 X-ENS

1. Montrer que si une suite (f_n) de fonctions k -lipschitzienne sur un segment $[a, b]$ converge simplement, alors la convergence est uniforme.
2. Montrer que si une suite (f_n) de fonctions convexes sur un segment $[a, b]$ converge simplement, alors la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]a, b[$.

2. Séries de fonctions

5 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \text{Arctan}(x+n) - \text{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

6 Mines-Ponts On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

1. Étudier l'existence et la continuité de S .
2. Donner des équivalents en 0 et 1^- .

7 X-ENS On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(\dots(\sin x)\dots))}_{n \text{ fois}}$.

Montrer que la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

8 X-ENS

1. Quelle est la limite simple de (f_n) où $f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que

$$1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{n}$$

3. En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout $D_f(0, R)$ avec $R > 0$.