

1 Remplacement de l'inégalité triangulaire

Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacée par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x) \leq 1$ est un convexe de E).

Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y .

Solution de 1 : Remplacement de l'inégalité triangulaire

Le sens direct, c'est du cours.

Réciproquement, si $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est défini-positive, homogène et que sa boule unité fermée est convexe, soit $x, y \in E$.

Si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$, l'inégalité triangulaire est immédiate.

Sinon, on s'intéresse à $(1-t)\frac{x}{N(x)} + t\frac{y}{N(y)} \in B'(0_E, 1)$ pour $t = \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}$ et on obtient $\frac{N(x+y)}{N(x)+N(y)} \leq 1$ (sans oublier que l'on ne sait pas encore que N est une norme mais le fait qu'elle soit défini-positive et homogène permet de justifier les calculs.)

2 Caractérisation des normes euclidiennes

Montrer qu'une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

Solution de 2 : Caractérisation des normes euclidiennes

L'identité du parallélogramme, c'est

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Le sens direct, c'est du cours.

Réciproquement, si $\|\cdot\|$ est une norme vérifiant l'identité du parallélogramme.

On pose

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

On a alors facilement une forme symétrique définie-positive.

Seule la bilinéarité demande un peu de travail.

On commence par montrer que $(x+x'|y) = (x|y) + (x'|y)$. Or

$$(x+x'|y) = \frac{1}{4}(\|x+x'+y\|^2 - \|x+x'-y\|^2)$$

et, par l'identité du parallélogramme,

$$(x|y) + (x'|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x'+y\|^2 - \|x+y\|^2 - \|x'+y\|^2) = \frac{1}{8}(\|x+x'+2y\|^2 - \|x+x'-2y\|^2)$$

Reste à utiliser encore l'identité du parallélogramme :

$$\|x+x'+2y\|^2 = \|(x+x'+y)+y\|^2 = 2(\|x+x'+y\|^2 + \|y\|^2) - \|x+x'\|^2$$

et

$$\|x+x'-2y\|^2 = \|(x+x'-y)-y\|^2 = 2(\|x+x'-y\|^2 + \|y\|^2) - \|x+x'\|^2$$

ce qui permet bien de conclure $(x+x'|y) = (x|y) + (x'|y)$.

Pour $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$, ce n'est pas très simple non plus : comme dans l'exercice classique qui demande de trouver les morphismes additifs continus de $\mathbb{R}$, on le vérifie par récurrence pour $\lambda \in \mathbb{N}$, puis, le morphisme de groupe additif $x \mapsto (x|y)$ étant impair, c'est vrai pour $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Pour $\lambda = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers, on a $q(\lambda x|y) = (q\lambda x|y) = (px|y) = p(x|y)$ ce qui permet de conclure.

Enfin, la continuité de la norme (elle est 1-lipschitzienne) permet de passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ par densité, et de conclure.

3 X; Mines-Ponts Existe-t-il des normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariantes par similitude ?

Même question en remplaçant $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ par $\mathcal{O}(n)$.

Solution de 3 : X; Mines-Ponts

Non : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables mais ne peuvent avoir même norme.

4

Mines-Ponts MPI 2025 sans préparation

On définit, sur $\mathbb{R}[X]$,

$$N(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 P(t) t^n dt \right| \quad \|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| dt$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Les normes N et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ?

Solution de 4 : Mines-Ponts MPI 2025 sans préparation

- 1.
2. Non : considérer $P_n = X^n$.
3. Non, considérer $f_k : t \mapsto \cos(2k\pi t)$ et utiliser le théorème de Weierstraß.

On calcule $\|f_k\|_1 = \frac{2}{\pi}$ et, par IPP, $N(f_k) \leq \frac{1}{2k\pi} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

Cela prouve la non équivalence de N et $\|\cdot\|_1$ sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$.

Par théorème de Weierstraß, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a un polynôme P_k tel que $\|P_k - f_k\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ car f_k est continue sur le segment $[0, 1]$.

Alors $\|P_k\|_1 \geq \|f_k\|_1 - \|P_k - f_k\|_1 \geq \frac{2}{\pi} - \frac{1}{k}$ donc $\|P_k\|_1 \not\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ et $N(P_k) \leq N(P_k - f_k) + N(f_k) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{2k\pi}$ donc $N(P_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, ce qui permet de conclure que les normes ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$ non plus.

5

Suites de Cauchy - Espaces complets

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, une suite u est dite **de Cauchy** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon.$$

Cela se traduit aussi par $u_p - u_q \xrightarrow[p, q \rightarrow +\infty]{} 0$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Lorsque la réciproque est vraie, on dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est **complet**. On dit aussi que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un **espace de Banach**.

2. Montrer que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet. Expliquer rapidement pourquoi c'est encore vrai pour un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
3. Montrer que $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), N_1)$ n'est pas complet.

On pourra introduire les fonctions définies par $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente à valeurs dans cet espace est convergente.
5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Montrer qu'une série $\sum u_n$ à valeurs dans E converge si et seulement si elle vérifie le **critère de Cauchy** :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall q \geq p \geq N, \left\| \sum_{k=p}^q u_k \right\| \leq \varepsilon$$

Solution de 5 : Suites de Cauchy - Espaces complets

1. **Toute suite convergente est de Cauchy**

Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\|u_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $n \geq N$ et $p \geq 0$. L'inégalité triangulaire donne

$$\|u_{n+p} - u_n\| = \|u_{n+p} - \ell + \ell - u_n\| \leq \|u_{n+p} - \ell\| + \|\ell - u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La suite (u_n) satisfait donc le critère de Cauchy.

2. Complétude de $(\mathbb{K}, |\cdot|)$

- En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition d'une suite (u_n) de Cauchy dans $\mathbb{K}$, on obtient qu'une telle suite est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente vers une limite ℓ .

Or, on va montrer qu'une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge vers cette même valeur.

En effet, posons $\varepsilon < 0$. On a un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Prenons alors $n \geq N$, et alors $\varphi(n) \geq n \geq N$. On peut alors écrire $\|u_n - \ell\| \leq \|u_n - u_{\varphi(n)}\| + \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

La suite (u_n) converge donc vers ℓ , ce qui prouve que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet.

- Dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$, toutes les normes sont équivalentes. Quitte à choisir la norme infini dans une base fixée, une suite de Cauchy revient à avoir toutes les suites de coordonnées dans cette base sont aussi de Cauchy, donc convergent d'après le cas précédent, ce qui permet de conclure que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

3. Non-complétude de $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), N_1)$

On pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$. Pour $n > m$, évaluons la norme de la différence.

$$N_1(f_n - f_m) = \int_0^1 \sum_{k=m+1}^n \frac{x^k}{k} dx = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Par décomposition en éléments simples, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. La somme est télescopique : $N_1(f_n - f_m) = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}$.

Cette quantité tend vers 0 lorsque $m, n \rightarrow +\infty$. La suite (f_n) est donc bien de Cauchy pour N_1 .

Supposons par l'absurde que cette suite converge pour la norme N_1 vers une fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Soit $c \in [0, 1[$. Posons $g(x) = -\ln(1-x)$.

Pour tout $x \in [0, c]$, l'intégration de l'identité géométrique $\sum_{k=1}^n t^{k-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$ entre 0 et x donne

$$g(x) - f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

On majore directement l'erreur indépendamment de x

$$|f_n(x) - g(x)| \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-c} dt \leq \frac{c^{n+1}}{(n+1)(1-c)}$$

Le majorant tend vers 0, donc (f_n) converge uniformément vers g sur $[0, c]$.

La convergence uniforme implique la convergence en moyenne $\int_0^c |f_n(x) - g(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par ailleurs, la convergence de (f_n) vers f pour N_1 donne $\int_0^c |f_n(x) - f(x)| dx \leq N_1(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

L'inégalité triangulaire permet de lier ces deux limites

$$\int_0^c |f(x) - g(x)| dx \leq \int_0^c |f(x) - f_n(x)| dx + \int_0^c |f_n(x) - g(x)| dx$$

Par passage à la limite, l'intégrale de la fonction continue et positive $|f - g|$ est nulle sur $[0, c]$.

Les fonctions f et g coïncident donc sur $[0, c]$.

Ceci étant vrai pour tout $c \in [0, 1[$, on a $f(x) = -\ln(1-x)$ sur $[0, 1[$.

Or, f est supposée continue sur le segment fermé $[0, 1]$, elle doit donc y être bornée.

C'est une contradiction flagrante puisque $-\ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.

L'espace n'est pas complet.

4. Lien entre séries absolument convergentes et espaces complets

($\Rightarrow$) Supposons l'espace complet. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^n \|u_k\|$.

$$\text{Pour } n, p \in \mathbb{N}, \|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\| = \Sigma_{n+p} - \Sigma_n.$$

La série des normes étant convergente, la suite réelle (Σ_n) est convergente donc de Cauchy, donc la suite (S_n) est donc de Cauchy.

L'espace étant complet, la suite (S_n) converge : la série $\sum u_n$ est convergente.

($\Leftarrow$) Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit (x_n) une suite de Cauchy.

En appliquant la définition avec $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, on construit une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}$.

En effet, si N_n est le rang de la définition de suite de Cauchy associé à $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, il suffit de poser $\varphi(0) = N_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \max(\varphi(n-1), N_n)$.

La série $\sum (x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ est absolument convergente par comparaison à la série géométrique convergente à termes positifs $\sum \frac{1}{2^n}$.

Par hypothèse, elle converge. Par télescopage, la suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ .

La suite (x_n) étant de Cauchy avec une suite extraite convergente, on en déduit comme en question 2 qu'elle converge vers ℓ . L'espace est donc complet.

5. Critère de Cauchy pour les séries

Soit E un espace de Banach. Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La série converge si et seulement si la suite (S_n) converge. L'espace E étant complet, la suite (S_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall q > p \geq N, \|S_q - S_p\| \leq \varepsilon$$

Sachant que $S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^q u_k$, il suffit de poser un nouvel indice $p' = p + 1$. L'inégalité $q > p \geq N$ devient $q \geq p' \geq N + 1$.

Quitte à redéfinir N , la condition s'écrit de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall q \geq p' \geq N, \left\| \sum_{k=p'}^q u_k \right\| \leq \varepsilon$$

Ceci est la formulation exacte du critère de Cauchy proposée par l'énoncé. L'équivalence est démontrée.

6 Mines-Ponts 2025

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .
2. Soit $f \in E$. On pose $g = f + 2f' + f''$. Exprimer f en fonction de g .
3. Montrer qu'il existe $a > 0$ telle que $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq aN(f)$.
4. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Solution de 6 : Mines-Ponts 2025

1. L'axiome de séparation impose de résoudre l'équation différentielle linéaire $f'' + 2f' + f = 0$. Les conditions initiales $f(0) = f'(0) = 0$ permettent alors d'obtenir que f est la fonction nulle.
2. On peut remarquer que $f'' + 2f' + f = (f' + f)' + (f' + f)$. On aboutit à l'expression $f(x) = e^{-x} \int_0^x \left(\int_0^u g(t) e^t dt \right) du$, puis, après intégration par partie dans l'intégrale extérieure, $f(x) = e^{-x} \int_0^x (x-t) e^t g(t) dt$.
3. On utilise la question précédente. On aboutit à $\|f\|_\infty \leq \left(1 - \frac{2}{e}\right) N(f)$.
4. On considère la suite définie par $f_n(x) = x^n$ pour $n \geq 2$ appartient à E . Les normes infini valent toutes 1 et $N(f_n)$ diverge vers l'infini, ce qui prouve la non-équivalence des normes.

7 Mines-Ponts 2025

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \max_{x \in [-1,1]} |P'(x)|$.

- Justifier que N_a est une norme.
- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

Solution de 7 : Mines-Ponts 2025

- L'axiome de séparation est le seul point délicat. L'annulation de la norme donne un polynôme P vérifiant $P(a) = 0$ et une dérivée P' nulle sur le segment $[-1, 1]$. Il faut impérativement préciser que P' possède une infinité de racines pour affirmer qu'il s'agit du polynôme nul.
- Si a et b appartiennent au segment $[-1, 1]$, l'inégalité des accroissements finis permet de majorer l'écart $|P(a) - P(b)|$. Cela prouve l'équivalence des deux normes.
Si a n'appartient pas au segment $[-1, 1]$ et $b = 0$, les normes ne sont pas équivalentes. Il faut exhiber une suite de polynômes. La suite définie par $P_n(X) = (X/a)^n$ constitue un contre-exemple. Sa dérivée tend uniformément vers zéro sur $[-1, 1]$. Son évaluation en a vaut systématiquement 1. Le quotient des normes diverge.

- 8** **X** Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Montrer que $F + G$ est fermé.

Solution de 8 : X

Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer $F + \text{Vect}(u)$ fermé pour tout $u \notin F$.

Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de $F + \text{Vect}(u)$ de limite x .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $x_n = y_n + \lambda_n u$ avec $y_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$.

Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite (λ_n) est bornée.

Si la suite (λ_n) n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$.

Posons alors $z_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n + u$.

Puisque $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ et $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$, on a $\|z_n\| \rightarrow 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n} y_n \rightarrow -u$.

Or la suite de terme général $\frac{1}{\lambda_n} y_n$ est une suite d'éléments de l'espace fermé F , donc $-u \in F$ ce qui exclu.

Ainsi, la suite (λ_n) est bornée et l'on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(n)})$ de limite $\lambda \in \mathbb{K}$.

Par opérations, la suite $(y_{\varphi(n)})$ est alors convergente.

En notant y sa limite, on a $y \in F$ car l'espace F est fermé.

En passant la relation $x_n = y_n + \lambda_n u$ à la limite, on obtient $x = y + \lambda u \in F + \text{Vect}(u)$.

Ainsi, l'espace $F + \text{Vect}(u)$ est fermé.

- 9 Centrale-Mines** On munit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

$A = \{\text{suites croissantes}\}$

$B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$

$C = \{\text{suites convergentes}\}$

$D = \{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\}$

$E = \{\text{suites périodiques}\}$

$F = \{\text{suites terme général d'une série absolument convergente}\}.$

Solution de 9 : Centrale-Mines

- A est fermé** car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \leq u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $u \in A$.

- **B est fermé** car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n^p| \leq \varepsilon/2$$

et donc

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon$$

Ainsi $u \rightarrow 0$ et donc $u \in B$.

- **C est fermé.** En effet, si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p , la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \leq \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p$. $v^p \in B$ et $v^p \rightarrow u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.
- **D est fermé** car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p , il existe une infinité de n tels que $|u_n^p| \leq \varepsilon/2$ et donc tels que

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon$$

Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.

- **E n'est pas fermé.** Notons δ^p , la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore. Posons alors

$$u^p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} \delta^k$$

qui est élément de E . La suite u^p converge car

$$\|u^{p+q} - u^p\|_\infty \leq \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^p} \rightarrow 0$$

et la limite u de cette suite n'est pas périodique car

$$u_0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} = 1$$

et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- Soit (u^n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}.$$

La suite (u^n) est une suite d'éléments de F et une étude en norme $\|\cdot\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \rightarrow u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de F , **la partie F n'est pas fermée.**

10 Centrale Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow +\infty$. Soit (v_p) une suite réelle telle que $v_p \rightarrow +\infty$.

1. On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $(w_n) = (u_{n+p} - v_q)$. Montrer que l'on peut choisir p et q de telle sorte que l'on ait $w_0 \leq a$ et $|w_{n+1} - w_n| \leq (b-a)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\{u_n - v_p, (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'adhérence de $\{\sin(u_n), n \in \mathbb{N}\}$.
4. Déterminer l'adhérence de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor, n \in \mathbb{N}\}$.
5. Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n - \lfloor u_n \rfloor)$?

Solution de 10 : Centrale

1. Sachant $(u_{n+1} - u_n)$ de limite nulle, pour $\varepsilon = (b-a)/2 > 0$, il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \implies |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+p+1} - u_{n+p}| \leq \varepsilon$$

Sachant (v_p) de limite $+\infty$, le terme $u_p - v_q$ tend vers $-\infty$ lorsque q tend vers $+\infty$ et il existe donc un rang q tel que $u_p - v_q \leq a$. Pour ces paramètres p et q , la suite de terme général $w_n = u_{n+p} - v_q$ vérifie les conditions requises.

2. Posons

$$E = \{u_n - v_p \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$$

La suite (u_n) étant de limite $+\infty$, la suite (w_n) l'est aussi et l'ensemble A des $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $w_n \leq a$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée. On peut alors introduire le plus grand entier N vérifiant $w_N \leq a$. On vérifie

$$w_{N+1} > a \quad \text{et} \quad w_{N+1} \leq w_N + \underbrace{|w_{N+1} - w_N|}_{\leq (b-a)/2} < b.$$

On a ainsi établi :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \implies \exists x \in E, x \in]a; b[$$

La partie E est donc dense dans $\mathbb{R}$.

3. Introduisons $(v_p) = (2p\pi)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et l'image de celle-ci par la fonction sinus est $S = \{\sin(u_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Cette partie est incluse dans le fermé $[-1; 1]$ et donc $\bar{S}$ aussi. Inversement, tout élément de $[-1; 1]$ est le sinus d'un angle θ et il existe une suite d'éléments de E de limite θ . Par continuité de la fonction sinus, il existe une suite d'éléments de S de limite $\sin(\theta)$. Au final,

$$\bar{S} = [-1; 1]$$

4. Introduisons $(v_p) = (p)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et l'image de celle-ci par la fonction $f : x \mapsto x - [x]$ est $F = \{u_n - [u_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$. Cette partie est incluse dans le fermé $[0; 1]$ et donc $\bar{F}$ aussi. Inversement, tout élément de $]0; 1[$ est limite d'une suite d'éléments de E . Les termes de cette suite appartiennent à $]0; 1[$ à partir d'un certain rang et sont donc invariants par f : ils appartiennent à F . Ainsi,

$$]0; 1[\subset \bar{F}$$

Enfin, $\bar{F}$ étant une partie fermée, on a aussi

$$[0; 1] \subset \bar{F}$$

puis l'égalité.

5. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n) = (u_n - [u_n])$ est

$$\text{Adh}(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, n \geq N\}}.$$

En effet, ℓ est une valeur d'adhérence de x si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $\|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

Par l'étude qui précède

$$\overline{\{x_n, n \geq N\}} = [0; 1]$$

et l'ensemble des valeurs d'adhérence de x est exactement $[0; 1]$.