

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

1 Remplacement de l'inégalité triangulaire

Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacée par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x) \leq 1$ est un convexe de E).

Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y .

2 Caractérisation des normes euclidiennes

Montrer qu'une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

3 X; Mines-Ponts Existe-t-il des normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariantes par similitude ?

Même question en remplaçant $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ par $\mathcal{O}(n)$.

4 Mines-Ponts MPI 2025 sans préparation

On définit, sur $\mathbb{R}[X]$,

$$N(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 P(t) t^n dt \right| \quad \|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| dt$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Les normes N et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ?

5 Suites de Cauchy - Espaces complets

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, une suite u est dite **de Cauchy** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon.$$

Cela se traduit aussi par $u_p - u_q \xrightarrow[p, q \rightarrow +\infty]{} 0$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Lorsque la réciproque est vraie, on dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est **complet**. On dit aussi que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un **espace de Banach**.

2. Montrer que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet.
3. Montrer que $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), N_1)$ n'est pas complet.

On pourra introduire les fonctions définies par $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

4. Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente à valeurs dans cet espace est convergente.
5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Montrer qu'une série $\sum u_n$ à valeurs dans E converge si et seulement si elle vérifie le **critère de Cauchy** :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall q \geq p \geq N, \left\| \sum_{k=p}^q u_k \right\| \leq \varepsilon$$

6 Mines-Ponts 2025

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .
2. Soit $f \in E$. On pose $g = f + 2f' + f''$. Exprimer f en fonction de g .
3. Montrer qu'il existe $a > 0$ telle que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq aN(f)$.
4. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

7 Mines-Ponts 2025

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \max_{x \in [-1, 1]} |P'(x)|$.

1. Justifier que N_a est une norme.
2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

8 X Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Montrer que $F + G$ est fermé.9 Centrale-Mines On munit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

- $A = \{\text{suites croissantes}\}$
- $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$
- $C = \{\text{suites convergentes}\}$
- $D = \{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\}$
- $E = \{\text{suites périodiques}\}$
- $F = \{\text{suites terme général d'une série absolument convergente}\}.$

10 Centrale Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow +\infty$. Soit (v_p) une suite réelle telle que $v_p \rightarrow +\infty$.

1. On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $(w_n) = (u_{n+p} - v_q)$. Montrer que l'on peut choisir p et q de telle sorte que l'on ait $w_0 \leq a$ et $|w_{n+1} - w_n| \leq (b - a)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\{u_n - v_p, (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'adhérence de $\{\sin(u_n), n \in \mathbb{N}\}$.
4. Déterminer l'adhérence de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor, n \in \mathbb{N}\}$.
5. Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n - \lfloor u_n \rfloor)$?