

SÉRIES NUMÉRIQUES

1 Pour chauffer

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un terme général décroissant de série convergente, montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution de 1 : Pour chauffer

On reprend l'idée de la preuve classique de divergence de la série harmonique consistant à minorer $H_{2n} - H_n$... Mais dans un cas de convergence !

Si $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq n u_{2n} \geq 0$ donne $2n u_{2n} \rightarrow 0$.

Puis, toujours pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq 2n u_{2n} + u_{2n+1} \rightarrow 0$ donc $(2n+1)u_{2n+1} \rightarrow 0$.
Finalement, $n u_n \rightarrow 0$ ce qui conclut.

2 Mines – pas difficile

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Déterminer la nature des séries de terme général donné par les formules

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}, \quad w_n = \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)^\alpha}$$

Solution de 2 : Mines – pas difficile

La plus facile est sans doute la deuxième, pour laquelle, par théorème sur les séries alternées, dont les hypothèses sont assez évidemment réalisées ici,

$$|v_n| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

ce qui, par comparaison à une série de Riemann, donne la convergence absolue, donc la convergence, de $\sum v_n$.

Pour la première, on fait une comparaison série-intégrale : c'est une idée importante à avoir quand on veut un ordre de grandeur de ce genre de terme. On a

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq u_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

On calcule :

$$\frac{1}{\alpha-1} n^{1-\alpha} \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha-1} (n-1)^{1-\alpha}$$

Mais cela implique

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha-1} n^{1-\alpha}$$

et donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $1 - \alpha < -1$, i.e. $\alpha > 2$ (comparaison à une série de Riemann).

Pour la troisième, des comparaisons séries-intégrales donnent l'équivalent

$$w_n \sim \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

On est donc ramené à l'étude de convergence d'une série de Bertrand, dans un cas qui se règle (encore !) par comparaison série-intégrale, on trouve qu'il y a convergence si et seulement si $\alpha > 1$.

3 Mines 2025

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum (-1)^n \frac{\sin(\text{Arctan}(n^\alpha))}{n}$?

Solution de 3 : Mines 2025

Utiliser la relation $\sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

4 Centrale

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout n , $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n^2 + 1}$.

Étudier la nature de la série de terme général $v_n = u_n - 1$.

Solution de 4 : Centrale

On voit rapidement que $u_{n+1} \geq -1$, donc la suite est positive à partir du rang 2 au moins. Puis on situe u_n par rapport à 1. On calcule $u_{n+1} - 1$, et on voit que u_n est alternativement plus grand et plus petit que 1. Puis on montre que $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$. D'où la convergence de (u_n) vers 1 et la convergence de $\sum v_n$ par comparaison à une série géométrique.

5 Mines

Discuter, en fonction des réels strictement positifs a et α , la nature de la série de terme général

$$u_n = a^{x_n} \quad \text{où} \quad x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

Solution de 5 : Mines

Si $a \geq 1$, divergence grossière. Supposons donc $a < 1$.

Si (x_n) converge, divergence grossière aussi. Supposons donc $\alpha \leq 1$.

Si $\alpha = 1$, le développement asymptotique

$$x_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

n'est pas au programme. On encadre :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq x_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$$

ce qui suffit pour conclure, en remarquant que $a^{\ln n} = n^{\ln a} \dots$

Si $\alpha < 1$, la comparaison à une série de Riemann (et une comparaison somme-intégrale pour évaluer l'ordre de grandeur de x_n) montre la convergence.

6 X? Pas si difficile!

On définit $u_n = 1/n$ si n n'est pas un carré, $u_n = -1/n$ si n est un carré. Nature de la série $\sum u_n$?

Solution de 6 : X? Pas si difficile!

En passant par les sommes partielles, $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{p=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{p^2} = H_n - 2S_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \rightarrow +\infty$ par divergence de la série harmonique et convergence de la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$.

7 Mines 2025

1. Soit $a > 0$. Discuter de la nature de $\sum \frac{1}{(n!)^{a/n}}$ en fonction de a .
2. Soit $(v_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum (n!)^{2/n} v_n^2$ converge. Montrer que $\sum v_n$ converge.

Solution de 7 : Mines 2025

1. Utiliser Stirling.
2. Utiliser $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ou Cauchy-Schwarz.

8 Mines 2025

Soit α un réel > 1 . Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Vérifier la bonne définition de u_n , et en donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.
2. On pose $v_n = \frac{u_{n^2}}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$. Étudier la convergence des séries $\sum v_n$ et $\sum (-1)^n v_n$.

Solution de 8 : Mines 2025

1. Comparaison série-intégrale
 2. Développement asymptotique de u_n issu de la comparaison série-intégrale
-

9 Mines 2025

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\sqrt{n!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \cdots (1 + \sqrt{n+1})}$.

Étudier la convergence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Solution de 9 : Mines 2025

1. Écrire astucieusement $u_n = v_n - v_{n+1}$ pour une certaine suite (v_n) à déterminer.
 2. Calculer la somme partielle à l'aide d'un télescopage.
 3. Obtenir la limite de v_n en calculant $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ puis en prenant le logarithme. Utiliser le théorème de sommation des équivalents dans le cas de divergence.
-

10**X - ENS**

Soit $d > 0$ et (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geq d$. Soit $\alpha > 2$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

Solution de 10 : X - ENS

Quitte à changer z_n en $\frac{z_n}{\frac{d}{2}}$ ce qui ne change pas la nature de la série, on peut normaliser et supposer que $n \neq m \implies |z_n - z_m| \geq 2$.

L'idée est de montrer qu'il y a « peu » de z_n dont le module est « petit »... Soyons plus précis, et comptons les z_n qui sont dans une couronne $I_p = \{k \in \mathbb{N}, p \leq |z_k| < p+1\}$: on définit $n(p) = |I_p|$.

Si $p \leq |z_k| < p+1$, $D(z_k, 1)$ est un disque inclus dans la couronne

$$C_p = \{z \in \mathbb{C}, p-1 \leq |z| \leq p+2\}$$

Soit $p \geq 1$. Il y a $n(p)$ tels disques, et ils sont disjoints. La somme de leurs aires est donc inférieure ou égale à l'aire de la couronne C_p , ce qui se traduit par

$$n(p) \times \pi \leq \pi(p+2)^2 - \pi(p-1)^2$$

d'où, en simplifiant un peu,

$$n(p) \leq 3(1+2p)$$

Il y a d'autre part au plus un n tel que $|z_n| < 1$.

On peut alors faire une sommation par paquets, tous les termes étant positifs. Dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^\alpha} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ |z_n| < 1}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ |z_n| \in [p, p+1[}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} \right) \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ |z_n| < 1}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n(p)}{p^\alpha} \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ |z_n| < 1}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} + 3 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2p+1}{p^\alpha} < +\infty$$

$$\text{car } \frac{2p+1}{p^\alpha} \sim \frac{2}{p^{\alpha-1}} \text{ avec } \alpha-1 > 1.$$

$$\text{Donc } \sum \frac{1}{|z_n|^\alpha} \text{ converge.}$$

11

X Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

2. Préciser le signe de ℓ .

3. Montrer que $\ell = -(1 + \sqrt{2}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

4. Montrer que $u_n = \ell + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

5. Montrer que $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2}$.
6. Étudier les variations de u .
7. Déterminer un développement asymptotique semblable à celui de la question 4 pour la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.
8. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner un développement asymptotique à trois termes pour $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Solution de 11 : X

C'est essentiellement la même méthode que l'exercice du TD sur le développement de la série harmonique.

1. Plusieurs méthodes possibles. On peut calculer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ pour montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, et appliquer la correspondance suites-séries. On trouve

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2\sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1 \right) \sim -\frac{1}{4n^{3/2}}.$$

2. Pour cette deuxième question, une comparaison somme-intégrale est intéressante :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

En calculant :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

On a donc $\ell \leq -1$.

3. La convergence de la série au second membre relève du théorème sur les séries alternées. On s'inspire du calcul de la somme de la série harmonique alternée, en séparant les termes d'indices pairs et impairs. Ce qui ne peut se faire que dans une somme partielle, sinon on écrit des séries divergentes. Comme la série converge, on peut se contenter des sommes ayant un nombre pair de termes. Si $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{2N} \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2k}} \\ &= \sum_{p=1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{p}} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2k}} \\ &= u_{2N} + 2\sqrt{2N} - \frac{2}{\sqrt{2}}(u_N + 2\sqrt{N}) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{2})\ell \end{aligned}$$

D'où le résultat, qui d'ailleurs confirme le signe de u_n . On pouvait aussi retrancher à

$\sum_{p=1}^{2N} \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}}$ la somme $\sum_{p=1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{p}}$, une présentation un peu différente de la même idée.

4. On cherche un équivalent de $u_n - \ell = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} - \ell$. L'idée est d'utiliser la sommation des équivalents avec le lien suite-série.

$$u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{4n^{3/2}}$$

On est dans le cas de convergence, avec $\frac{1}{4n^{3/2}} > 0$, donc on peut en déduire

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_n - \ell \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{4k^{3/2}} = \frac{1}{4} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \sim \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{1}{2}n^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

le dernier équivalent étant obtenu classiquement par comparaison à une intégrale.

On obtient $u_n = \ell + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ce qui n'est pas tout à fait ce que l'on voulait.

Pour obtenir le terme en $\mathcal{O}$, une idée est d'utiliser le théorème de sommation appliqué à $v_n - v_{n+1} = \left(u_n - \ell - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(u_{n+1} - \ell - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$.

On obtient alors

$$v_n - 0 = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{5/2}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

toujours avec une comparaison série-intégrale pour terminer.

5. Avec l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p} + \sqrt{p-1})^2} &= \sum_{p=1}^n \frac{(\sqrt{p} - \sqrt{p-1})^2}{\sqrt{p}} \\ &= 2 \sum_{p=1}^n \sqrt{p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}} - 2 \sum_{p=1}^n \sqrt{p-1} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

6. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} < 0$ donc u décroît strictement.
7. Voir l'exercice de TD. Même méthode.
8. On commence par une comparaison à une intégrale pour obtenir l'équivalent

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

On applique alors la méthode précédente à $u_n = w_n - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Comme

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \left((n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \right) = \frac{1}{n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} - 1 \right) \sim -\frac{\alpha}{2n^{1+\alpha}}.$$

On obtient un terme général de série convergente, il existe donc une constante β telle que $w_n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta + o(1)$.

Pour avoir un terme de plus, on somme les équivalents, cas de convergence, $u_n - u_{n+1} \sim \frac{\alpha}{2n^{1+\alpha}}$:

$$u_n - \beta \sim \frac{\alpha}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \sim \frac{\alpha}{2\alpha n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha}$$

en complétant avec une comparaison série-intégrale. Finalement,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta + \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$
