

SÉRIES NUMÉRIQUES

1 Pour chauffer

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un terme général décroissant de série convergente, montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2 Mines – pas difficile

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Déterminer la nature des séries de terme général donné par les formules

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}, \quad w_n = \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)^\alpha}$$

3 Mines 2025

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum (-1)^n \frac{\sin(\text{Arctan}(n^\alpha))}{n}$?

4 Centrale

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout n , $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n^2 + 1}$.

Étudier la nature de la série de terme général $v_n = u_n - 1$.

5 Mines

Discuter, en fonction des réels strictement positifs a et α , la nature de la série de terme général

$$u_n = a^{x_n} \quad \text{où} \quad x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

6 X? Pas si difficile!

On définit $u_n = 1/n$ si n n'est pas un carré, $u_n = -1/n$ si n est un carré. Nature de la série $\sum u_n$?

7 Mines 2025

1. Soit $a > 0$. Discuter de la nature de $\sum \frac{1}{(n!)^{a/n}}$ en fonction de a .
2. Soit $(v_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum (n!)^{2/n} v_n^2$ converge. Montrer que $\sum v_n$ converge.

8 Mines 2025

Soit α un réel > 1 . Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Vérifier la bonne définition de u_n , et en donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.
2. On pose $v_n = \frac{u_{n^2}}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$. Étudier la convergence des séries $\sum v_n$ et $\sum (-1)^n v_n$.

9 Mines 2025

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2}) \cdots (1+\sqrt{n+1})}$.

Étudier la convergence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

10 X - ENS Soit $d > 0$ et (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geq d$. Soit $\alpha > 2$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.**11 X** Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
2. Préciser le signe de ℓ .
3. Montrer que $\ell = -(1+\sqrt{2}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.
4. Montrer que $u_n = \ell + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
5. Montrer que $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2}$.
6. Étudier les variations de u .
7. Déterminer un développement asymptotique semblable à celui de la question 4 pour la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.
8. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner un développement asymptotique à trois termes pour $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.