

1 Montrer que $I = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx$ converge et la calculer.

Solution de 1 :

Passer par les sommes partielles et utiliser la formule de Stirling.

Réponse : $\ln \frac{2}{\pi}$.

Soit $A \geq 1$ et $N = [A]$. Alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{(-1)^n}{x} dx + \int_N^A \frac{(-1)^N}{x} dx = \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) + (-1)^{[A]} \ln \frac{A}{[A]}$$

On a déjà $1 \leq \frac{1}{[A]} < 1 + \frac{1}{[A]}$ et $A \mapsto (-1)^{[A]} \ln \frac{A}{[A]} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$.

On continue le calcul en séparant dans la somme partielle les termes de rang pair et les termes de rang impair.

Supposons, sans perte de généralité, que N est impair et s'écrit $N = 2p + 1$ (si N est pair, cela revient à sortir un terme de la somme partielle, dont la limite est nulle). On écrit alors

$$\sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \sum_{k=1}^p \ln \left(\frac{2k+1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^p \ln \left(\frac{2k}{2k-1} \right) = \ln \left(\prod_{k=1}^p \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} \right) = \ln \left(\frac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p} p!^4} \right)$$

La formule de Stirling et un peu d'huile de coude permettent d'écrire

$$\frac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p} p!^4} \sim \frac{2}{\pi e} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

Donc l'intégrale converge et sa valeur est $\ln \frac{2}{\pi}$.

2 Mines-Ponts Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe n_0 entier naturel tel que, pour tout $n \geq n_0$, pour tout x réel,

$$|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Que peut-on dire de f ?

Solution de 2 : Mines-Ponts

Il existe un point x_0 tel que $P(x_0) = 0$. Si x est un réel quelconque, pour tout $n \geq n_0$ on peut écrire

$$\left| f(x) - \left(f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{n_0-1}}{(n_0-1)!} f^{(n_0-1)}(x_0) \right) \right| \leq \frac{(x - x_0)^n}{n!} \sup_{[x_0, x]} (|P|)$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, le majorant tend vers 0, on en déduit que f est polynomiale (de degré au plus $n_0 - 1$).

3 Mines-Ponts ; ENS Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t) dt$ ait

un sens. Démontrer que, si $x > a$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) dt$ a un sens.

On pourra examiner deux cas : intégrabilité ou simple convergence, pour l'existence de la première intégrale.

Solution de 3 : Mines-Ponts ; ENS

FGN 5.1.3

Il y a deux manières pour l'intégrale d'avoir un sens. Et donc, d'abord, traitons l'énoncé suivant, très simple :

Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ et a un réel tel que $t \mapsto e^{-ta} f(t)$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$. Démontrer que, si $x > a$, alors $t \mapsto e^{-tx} f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Solution :

Si $x > a$, $\forall t \in [0, +\infty[$ $|e^{-tx} f(t)| = e^{-tx} |f(t)| \leq e^{-ta} |f(t)| = |e^{-ta} f(t)|$
ce qui suffit pour conclure.

Posons-nous maintenant le problème plus difficile suivant :

Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t) dt$ converge. Démontrer que,

si $x > a$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) dt$ converge (ici, on ne suppose pas l'intégrabilité)

Pour cela, toujours le même principe, on introduit la fonction

$$F : y \mapsto \int_0^y e^{-ta} f(t) dt$$

pour faire une intégration par parties dans $\int_0^A e^{-tx} f(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-tx} f(t) dt &= \int_0^A e^{-ta} f(t) e^{-t(x-a)} dt \\ &= \int_0^A F'(t) e^{-t(x-a)} dt \\ &= \left[e^{-t(x-a)} F(t) \right]_{t=0}^{t=A} + (x-a) \int_0^A F(t) e^{-t(x-a)} dt \end{aligned}$$

Mais d'une part

$$e^{-A(x-a)} F(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

(car F a une limite finie en $+\infty$) et d'autre part F est bornée (continue sur $[0, +\infty[$ et ayant une limite réelle en $+\infty$) donc $t \mapsto F(t) e^{-t(x-a)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ($t \mapsto e^{-t(x-a)}$ l'est), ce qui conclut.

4 Ultra classique : inégalités de Hölder et de Minkowski Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $t > 0$. Montrer que $ab \leq \frac{(at)^p}{p} + \frac{(b/t)^q}{q}$.
2. **Inégalité de Hölder** : Soit $a < b$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^q soient intégrables. Montrer que fg l'est et que l'on a

$$\int_I fg \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} \left(\int_I g^q \right)^{1/q}$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\int_I f^p = \int_I g^q = 1$.

3. **Inégalité de Minkowski** : Soit I intervalle, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que $(f+g)^p$ l'est et que l'on a

$$\left(\int_I (f+g)^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} + \left(\int_I g^p \right)^{1/p}$$

On pourra remarquer que

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

4. On pose $a < b$ et on note $N_p(f) = \left(\int_a^b f^p \right)^{1/p}$ où $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue.

Montrer que $N_p(f) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} N_\infty(f) = \sup_I |f|$.

On pourra commencer par traiter le cas où $[a, b] = [0, 1]$... ou pas!

Solution de 4 : Ultra classique : inégalités de Hölder et de Minkowski

FGN 5 1.29

1. Inégalité de concavité en composant par $\ln$.
2. Si $N_p(f)$ et $N_p(g)$ ne sont pas nuls, on peut remplacer f et g par $f_1 = \frac{f}{N_p(f)}$ et $g_1 = \frac{g}{N_p(g)}$ et on applique la question précédente à $f_1 g_1$ avec $t = 1$, ça donne l'intégrabilité de fg , puis on intègre sur I . On obtient $\int_I f_1 g_1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On en déduit l'inégalité voulue.

Si, par exemple, $N_p(f) = 0$ alors, f étant continue par morceaux sur I , quitte à découper l'intégrale sur des sous-intervalles sur lesquels f est continue (et positive), on obtient que f est nulle sauf éventuellement en des points isolés, et l'inégalité s'écrit $0 \leq 0$.

3. On traite d'abord le cas où $I = [a, b]$.

On applique deux fois l'inégalité de Hölder en remarquant que $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$.

On conclut en traitant à part le cas où $\int_I (f+g)^p = 0$.

Pour I intervalle quelconque, le cas précédent appliqué sur $[a, b] \subset I$ donne $\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p \right)^{1/p}$ ce qui, par positivité donne l'intégrabilité de $(f+g)^p$ et en passant aux limites, donne l'inégalité voulue.

4. Seul le cas où f est à valeurs réelles positives a de l'intérêt, sinon on l'applique à $|f|$. D'abord, de

$$\forall t \in [0, 1] \quad f(t) \leq N_\infty(f)$$

on déduit

$$\forall t \in [0, 1] \quad f(t)^p \leq N_\infty(f)^p$$

(on a bien sûr $p > 0$, puisque ce qui nous intéresse est ce qui se passe quand $p \rightarrow +\infty$). En intégrant cette inégalité on déduit

$$\left(\int_0^1 f^p(t) dt \right)^{1/p} \leq N_\infty(f)$$

et donc c'est une minoration qui nous importe.

f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc est bornée (on en a déjà tenu compte!) et atteint ses bornes. Soit donc $t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$f(t_0) = N_\infty(f)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \quad f(t) \geq N_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

(si $t_0 = 0$ ou $t_0 = 1$, on se contente d'écrire cela sur un segment $[0, \eta]$ ou sur un segment $[1 - \eta, 1]$, et on fait le même raisonnement). Alors, pour tout $p > 0$,

$$\int_0^1 f^p(t) dt \geq \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} f^p(t) dt \geq 2\eta \left(N_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right)^p$$

et donc

$$\left(\int_0^1 f^p(t) dt \right)^{1/p} \geq (2\eta)^{1/p} \left(N_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Mais

$$(2\eta)^{1/p} \left(N_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} N_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2} \geq N_\infty(f) - \varepsilon$$

(passer sous forme exponentielle-logarithme si on a un doute), donc il existe un p_0 tel que

$$\forall p \geq p_0 \quad \left(\int_0^1 f^p(t) dt \right)^{1/p} \geq N_\infty(f) - \varepsilon$$

On conclut. Le cas d'un segment $[a, b]$ se traite de la même manière, ou en se ramenant à $[0, 1]$ par le changement de variable $t = a + (b - a)u$.

5 X-ENS Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue de carré intégrable.

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} g^2 = \int_0^{+\infty} f^2.$$

Solution de 5 : X-ENS

FGN 5.1.26

Le second terme de g fait penser à la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Posons $h : x \mapsto -2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$. La fonction h est de classe C^1 et $h' = -h - 2f$. On a $g = f + h$ donc

$$g^2 = f^2 + 2fh + h^2 = f^2 + h(h + 2f) = f^2 - hh'$$

Il reste à montrer que hh' a une intégrale nulle. Or,

$$\int_0^x h(t)h'(t)dt = \left[\frac{1}{2} h(t)^2 \right]_0^x = \frac{h^2(x)}{2}.$$

Il suffit donc de montrer que h tend vers 0 en $+\infty$ pour conclure. Si f tendait vers 0 en $+\infty$, on pourrait appliquer le théorème d'intégration des relations de comparaison (en $+\infty$, $e^x f(x) = o(e^x)$ et $\exp$ étant positive non intégrable en $+\infty$, l'intégrale $\int_0^x e^t f(t) dt$ serait un $o(e^x)$, mais ce n'est pas forcément le cas.

On adapte la preuve de ce théorème d'intégration pour utiliser l'intégrabilité de f^2 avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} f(t)^2 dt \leq \varepsilon^2$. Pour $x \geq A$, on a

$$\left| e^{-x} \int_0^x f(t)e^t dt \right| \leq e^{-x} \int_0^A |f(t)|e^t dt + e^{-x} \int_A^x |f(t)|e^t dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_A^x |f(t)|e^t dt \leq \sqrt{\int_A^x f(t)^2 dt} \sqrt{\int_A^x e^{2t} dt} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{e^{2x} - e^{2A}}{2}} \leq \varepsilon e^x$$

On a donc, pour $x \geq A$,

$$\left| e^{-x} \int_0^x f(t)e^t dt \right| \leq e^{-x} \int_0^A |f(t)|e^t dt + \varepsilon$$

Comme le premier terme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on a

$$\left| e^{-x} \int_0^x f(t)e^t dt \right| \leq 2\varepsilon,$$

pour x assez grand.

6 **ENS** Soit f, g deux applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}_*^+$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f g^n$. Montrer que la suite $(I_n^{1/n})$, puis la suite (I_{n+1}/I_n) , convergent vers $\max g$.

Solution de 6 : ENS

On commencera par une majoration simple (on dira évidemment que f et g sont strictement positives sur $[0, 1]$, continues donc atteignant chacune un minimum et un maximum sur ce segment). On commence par une majoration simple :

$$\forall t \in [0, 1] \quad f(t) (g(t))^n \leq f(t) (\max(g))^n$$

d'où l'on tire

$$I_n^{1/n} \leq \max(g) \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^{1/n}$$

et le majorant tend vers $\max(g)$.

Bien sûr, minorer, c'est un peu moins naturel. Il va sans doute falloir sortir les epsilons. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et un segment J de longueur η inclus dans $[0, 1]$ tel que

$$\forall t \in J \quad g(t) \geq \max(g) - \frac{\varepsilon}{2}$$

(il n'est pas restrictif de supposer $\max(g) - \frac{\varepsilon}{2} > 0$).

Ensuite, il y a un peu de technique. L'histoire des I_{n+1}/I_n est nettement plus dure. On peut commencer par dire que

$$I_{n+1} \leq \max(g) I_n$$

mais c'est dans l'autre sens que, tout au moins si g atteint son maximum en une infinité de points, la rédaction est compliquée. On s'en sort autrement, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui permet de dire que

$$I_{n+1}^2 \leq I_n I_{n+2}$$

et donc la suite de terme général I_{n+1}/I_n croît. Majorée par $\max(g)$, elle converge vers une limite $\ell > 0$.

Donc la suite de terme général $\ln I_{n+1} - \ln I_n$ converge vers $\ln \ell$. Par le théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\ln I_{k+1} - \ln I_k] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \ell$$

et le résultat sur $(I_n^{1/n})$ permet alors de conclure.

7 X-ENS : inégalité de Hardy Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $F : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que si f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$,

$$F^2 \text{ l'est, et } \int_0^{+\infty} F^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2.$$

Solution de 7 : X-ENS : inégalité de Hardy

FGN 5 1.28

Cette inégalité, apparemment trouvée par Hardy, est un grand classique de l'oral. Assez purement technique, pas évidente, ce n'est pas pour autant un excellent exercice d'oral.

Commençons par remarquer que F se prolonge par continuité en 0 : si g est une primitive de f sur $[0, +\infty[$, alors

$$F(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} g'(0) = f(0)$$

ce qui fait qu'il n'y a pas de problème en 0. Cela dit, F n'est pas a priori dérivable en 0, on fait donc une intégration par parties sur $[a, b]$, $0 < a < b$:

$$\begin{aligned} \int_a^b F^2 &= \left[-\frac{1}{x} \left(\int_0^x f \right)^2 \right]_a^b + 2 \int_a^b \frac{1}{x} f(x) \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx \\ &= \left[-x F^2(x) \right]_a^b + 2 \int_a^b f F \end{aligned}$$

On fait tendre a vers 0, on utilise la positivité de $b F^2(b)$ et on obtient

$$\int_0^b F^2 \leq 2 \int_0^b f F \leq 2 \sqrt{\int_0^b f^2} \sqrt{\int_0^b F^2}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz).

Si F est nulle, f l'est et rien n'est à démontrer.

Sinon, au moins pour b assez grand, on peut diviser pour obtenir

$$\sqrt{\int_0^b F^2} \leq 2 \sqrt{\int_0^b f^2}$$

ce qui permet de conclure en même temps à l'intégrabilité et à l'inégalité de Hardy.

8 Centrale 2025 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t} dt$.

1. Montrer que toute fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
2. Justifier l'existence des intégrales puis calculer $I_{n+1} - I_n$, I_n , $J_{n+1} - J_n$ et J_n .
3. Soit $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} f(t) \sin^2(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(t) dt$$

Solution de 8 : Centrale 2025

1. Théorème de Heine.
2. Facile.
3. Linéariser puis Riemann-Lebesgue.

9 Centrale 2025

1. Énoncer les théorèmes de changement de variable et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(P(t)) dt$ converge.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ n'est pas absolument convergente.

Solution de 9 : Centrale 2025

2. Modifier l'expression sous l'intégrale en multipliant et divisant par $P'(t)$ pour une intégration par parties.
3. Minorer la valeur absolue de la fonction par son carré puis linéariser.
Ou bien CV puis découpage d'intégrale comme pour l'intégrale de Dirichlet.

10 Centrale 2025 : inégalité de Kolmogorov Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire, ainsi que sa démonstration.
2. Montrer que si $f f'$ a une limite (finie ou infinie) non nulle en $+\infty$, alors f^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
On suppose désormais que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f f''$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $(f')^2$ l'est aussi et que $\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2 \right)$.
5. Montrer que f est uniformément continue et tend vers 0 en $\pm\infty$.

Solution de 10 : Centrale 2025 : inégalité de Kolmogorov

Indications :

1. Cours.
2. Primitiver $f f'$. Conclure dans le cas où la limite de $f f'$ est > 0 et obtenir une contradiction en la supposant < 0 .
3. Inégalité classique $2|xy| \leq x^2 + y^2$.
4. Intégrer par partie $\int (f')^2$ sur $[0, x]$.
Utiliser le résultat pour justifier la convergence de $f f'$ en $+\infty$ puis utiliser la question 2.
Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir l'inégalité.
5. Montrer que $f f'$ est intégrable pour en déduire les limites nulles.
Puis théorème de Heine étendu pour conclure.

Corrigé :

1. Cours.

2. Notons ℓ la limite de ff' . On peut écrire

$$f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^x ff'.$$

- En supposant que $\ell > 0$, et en posant $0 < a < \ell$, on a $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \geq A, f(t)f'(t) \geq a$, donc, pour $x \geq A$,

$$f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^a ff' + 2 \int_a^x ff' \geq f^2(0) + 2 \int_0^a ff' + 2a(x-A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

- En supposant que $\ell < 0$, et en posant $\ell < a < 0$, on a $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \geq A, f(t)f'(t) \leq a$, donc, pour $x \geq A$,

$$f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^a ff' + 2 \int_a^x ff' \leq f^2(0) + 2 \int_0^a ff' + 2a(x-A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

ce qui est en contradiction avec la positivité de f^2 .

3. Comme $|ff''| \leq \frac{1}{2}(f^2 + (f'')^2) \in L^1(\mathbb{R})$, on a $ff'' \in L^1(\mathbb{R})$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On peut écrire, par intégration par parties,

$$\int_0^x (f')^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x ff''.$$

- Comme $(f')^2 \geq 0$, le théorème de la limite monotone indique que $\int_0^x (f')^2$ a une limite finie ou $+\infty$ en $+\infty$.

- Par ailleurs, comme $ff'' \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_0^x ff''$ a une limite finie en $+\infty$.

- On en déduit que $f(x)f'(x) = \int_0^x (f')^2 + f(0)f'(0) + \int_0^x ff''$ a une limite ℓ finie ou $+\infty$ en $+\infty$.

La question 2. et l'hypothèse d'intégrabilité de f^2 permettent de conclure que $\ell = 0$.

- On a donc $f(x)f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, ce qui termine de justifier que $\int_0^{+\infty} (f')^2$ converge, donc, par positivité, $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$.
- On montre exactement de la même manière que $f \in L^1(\mathbb{R}^-)$ et on obtient

$$f \in L^1(\mathbb{R}).$$

5. Toujours par intégration par parties, on écrit, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_{-x}^x (f')^2 = f(x)f'(x) - f(-x)f'(-x) - \int_{-x}^x ff''$$

avec $ff' \xrightarrow{\pm\infty} 0$. On en tire

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2 \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ff'' \right)^2.$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient, tous les termes existant bien,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2 \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f'')^2.$$

6. On a toujours $f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^x ff'$ avec $|ff'| \leq \frac{1}{2}(f^2 + (f')^2) \in L^1(\mathbb{R})$ donc $ff' \in L^1(\mathbb{R})$. Donc f^2 a une limite en $\pm\infty$ qui ne peut être que nulle par intégrabilité de f^2 . Finalement,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

On montre une extension du théorème de Heine. Les limites nulles en $\pm\infty$ fournissant $A < B$ tels que

$$\forall x \in]-\infty, A] \cup [B, +\infty[, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La continuité de f sur le segment $[A-1, B+1]$ et le théorème de Heine fournissent un $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [A-1, B+1], \quad |x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

On pose $\delta = \min(\eta, 1) < 0$.

Alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leq \delta$, on a ou bien $x, y \in]-\infty, A]$, ou bien $x, y \in [A-1, B+1]$, ou bien $x, y \in [B, +\infty[$.

Dans les trois cas, $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

La fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.