

TD * INTÉGRATION

1 Montrer que $I = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx$ converge et la calculer.

2 Mines-Ponts Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe n_0 entier naturel tel que, pour tout $n \geq n_0$, pour tout x réel,

$$|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Que peut-on dire de f ?

3 Mines-Ponts ; ENS Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t) dt$ ait un sens. Démontrer que, si $x > a$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) dt$ a un sens.
On pourra examiner deux cas : intégrabilité ou simple convergence, pour l'existence de la première intégrale.

4 Ultra classique : inégalités de Hölder et de Minkowski Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $t > 0$. Montrer que $ab \leq \frac{(at)^p}{p} + \frac{(b/t)^q}{q}$.
- Inégalité de Hölder** : Soit $a < b$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que fg l'est et que l'on a

$$\int_I fg \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} \left(\int_I g^q \right)^{1/q}$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\int_I f^p = \int_I g^q = 1$.

- Inégalité de Minkowski** : Soit I intervalle, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que $(f+g)^p$ l'est et que l'on a

$$\left(\int_I (f+g)^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} + \left(\int_I g^p \right)^{1/p}$$

On pourra remarquer que

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

- On pose $a < b$ et on note $N_p(f) = \left(\int_a^b f^p \right)^{1/p}$ où $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue.

Montrer que $N_p(f) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} N_\infty(f) = \sup_I |f|$.

On pourra commencer par traiter le cas où $[a, b] = [0, 1]$... ou pas !

5 X-ENS Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue de carré intégrable.

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} g^2 = \int_0^{+\infty} f^2.$$

6 ENS Soit f, g deux applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f g^n$. Montrer que la suite $(I_n^{1/n})$, puis la suite (I_{n+1}/I_n) , convergent vers $\max g$.

7 X-ENS : inégalité de Hardy Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $F : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que si f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$, F^2 l'est, et $\int_0^{+\infty} F^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2$.

8 Centrale 2025 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t} dt$.

- Montrer que toute fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
- Justifier l'existence des intégrales puis calculer $I_{n+1} - I_n$, I_n , $J_{n+1} - J_n$ et J_n .
- Soit $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} f(t) \sin^2(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(t) dt$$

9 Centrale 2025

- Énoncer les théorèmes de changement de variable et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(P(t)) dt$ converge.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ n'est pas absolument convergente.

10 Centrale 2025 : inégalité de Kolmogorov Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire, ainsi que sa démonstration.
- Montrer que si $f f'$ a une limite (finie ou infinie) non nulle en $+\infty$, alors f^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

On suppose désormais que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que $(f')^2$ l'est aussi.
- Montrer que $\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2 \right)$.
- Montrer que f est uniformément continue et tend vers 0 en $\pm\infty$.