

1 ENS

Trouver les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$.

Solution de 1 : ENS

FGN 3 4.18

Soit G sous-groupe fini du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ de cardinal n .

Alors pour tout $g \in G$, $g^n = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

De plus, g est strictement monotone.

Si g est strictement croissante, on montre classiquement que $g = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Si on a $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) < x$, alors pour tout k , $g^k(x) < x$ et pour $k = n$, $x < x$ ce qui est contradictoire. Si $g(x) > x$ on aboutit de même à une contradiction. C'est donc que pour tout réel x , $g(x) = x$ donc $g = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Si g est strictement décroissante, alors g^2 est un homéomorphisme strictement croissant donc $g^2 = \text{id}_{\mathbb{R}}$: g est d'ordre 2.

De même, si f et g sont strictement décroissants, $f \circ g$ est strictement croissant donc $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}$ et $f = g^{-1}$.

Finalement, les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sont exactement

$\{\text{id}_{\mathbb{R}}\}$ et tous les $\{\text{id}_{\mathbb{R}}, g\}$ où g est une involution strictement décroissante continue.

2 X-ENS : problèmes de points fixes

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $[0, 1] \subset f([0, 1])$ ou $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, alors f a un point fixe dans $[0, 1]$.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment.
3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ croissante. Montrer que f a un point fixe.
4. Soit $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.
5. On garde les mêmes hypothèses et on suppose de plus f monotone. Montrer que f et g ont un point fixe commun.

Solution de 2 : X-ENS : problèmes de points fixes

FGN 3 4.12

1. Appliquer le TVI à $g : x \mapsto f(x) - x$.
2. D'après la question précédente, l'ensemble P des points fixes est non vide. On montre que P est un intervalle car il est convexe. En effet, si $a, b \in P$ avec $a < b$ et $x \in [a, b]$, $|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| \leq x - a$ donc $f(x) \leq x - a + a = x$. De même, avec b , on obtient $f(x) \geq x$ donc $f(x) = x$ et $x \in P$. Donc P est un intervalle.
Enfin, on vérifie que cet intervalle est fermé (et donc un segment) car si (x_n) est une suite convergente de points fixes de f , sa limite l'est encore par continuité de f .
3. Considérer $\alpha = \inf A$ où $A = \{x \in [0, 1], f(x) \leq x\}$. Montrer que $f(\alpha)$ minore A donc $f(\alpha) \leq \alpha$, puis, par croissance de f , $f(\alpha) \in A$ donc $\alpha \leq f(\alpha)$.
4. Nous proposons deux solutions de cette question.
 - Supposons par l'absurde que $g - f$ ne s'annule pas et par exemple qu'elle est strictement positive sur $[0, 1]$. Continue, elle atteint son minimum sur le compact $[0, 1]$ et il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $g(x) - f(x) \geq \varepsilon$, pour tout $x \in [0, 1]$. On a alors pour tout $x \in [0, 1]$,

$$g^2(x) = g(g(x)) \geq f(g(x)) + \varepsilon = g(f(x)) + \varepsilon \geq f^2(x) + 2\varepsilon$$

puis, par une récurrence immédiate, $g^n(x) \geq f^n(x) + n\varepsilon$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1]$. C'est impossible car, si $x \in [0, 1]$, les suites $(g^n(x))_{n \geq 0}$ et $(f^n(x))_{n \geq 0}$ sont bornées.

- L'ensemble P des points fixes de g est non vide (question 1), borné, et stable par f car f et g commutent. En effet, si $g(x) = x$, on a $g(f(x)) = f(g(x)) = f(x)$ et $f(x) \in P$. Soit $a = \inf P$ et $b = \sup P$. Comme P est stable par passage à la limite, a et b sont dans P . On en déduit que $g(a)$ et $g(b)$ sont dans P . Ainsi $g(a) \geq a = f(a)$ et $g(b) \leq b = f(b)$. La fonction $g - f$ est donc positive en a et négative en b . Elle s'annule.
5. On distingue alors deux cas selon la monotonie de f .
 - Si f est décroissante, alors elle admet un unique point fixe a . Comme f et g commutent, $g(a)$ est aussi un point fixe de f , donc $g(a) = a$.

- Si f est croissante, on considère l'ensemble P des points fixes de g ; il est non vide et fermé, stable par f , car f et g commutent. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in P$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . Cette suite est monotone (croissante si $u_0 \leq u_1$ et décroissante sinon) et comme elle est bornée, elle converge vers un point α . Comme (u_n) est à valeurs dans P , qui est stable par passage à la limite, on a $\alpha \in P$, donc α est un point fixe de g . Et comme f est continue, on a aussi $f(\alpha) = \alpha$, en passant à la limite dans la relation de récurrence. D'où le résultat.

3 Très classique

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq ax + b.$$

Solution de 3 : Très classique

On va traduire l'uniforme continuité avec une valeur fixée de ε et aller de 0 à x par pas de η maximum pour traduire l'uniforme continuité un certain nombre de fois et majorer $|f(x) - f(0)|$.

Soit $\eta > 0$ tel que $|x - x'| \leq \eta \implies |f(x) - f(x')| \leq 1$. Alors

$$|f(x)| = |f(0) - f(x) + f(0)| = \left| \sum_{i=0}^{k-1} (f(i\eta) - f((i+1)\eta)) + f(k\eta) - f(x) + f(0) \right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |f(i\eta) - f((i+1)\eta)| + |f(k\eta) - f(x)| + |f(0)|$$

Choisissons k tel que $k\eta \leq x < (k+1)\eta$: $k = \left\lfloor \frac{x}{\eta} \right\rfloor$.

On obtient alors

$$|x| \leq k + 1 + |f(0)| \leq \frac{x}{\eta} + |f(0)| + 1$$

$a = \frac{1}{\eta}$ et $b = |f(0)| + 1$ conviennent.

Autre rédaction possible : puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq 1$.

On en déduit que pour $x \in [0, \eta]$ on a

$$|f(x)| \leq |f(0)| + 1.$$

Puis que, pour $x \in [\eta, 2\eta]$, on a

$$|f(x)| \leq |f(\eta)| + 1 \leq |f(0)| + 2.$$

Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|f(x)| \leq |f(0)| + n + 1$$

sur l'intervalle $[n\eta, (n+1)\eta]$. Sur cet intervalle on peut majorer n par $\frac{x}{\eta}$.

On a donc prouvé que pour tout $x \geq 0$,

$$|f(x)| \leq |f(0)| + 1 + \frac{x}{\eta}$$

4 X-ENS : théorème de Césaro continu

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer, en commençant par traiter le cas $\ell = 0$, que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Solution de 4 : X-ENS : théorème de Césaro continu

FGN 3 4.7

Il s'agit d'une version continue du théorème de Césaro. Supposons d'abord $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on peut trouver A tel que $|f(x+1) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \geq A$. La fonction f étant continue sur le segment $[A, A+1]$, elle y est bornée : soit M tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [A, A+1]$.

Soit $x \in [A+1, A+2]$. On a $|f(x) - f(x-1)| \leq \varepsilon$ donc

$$|f(x)| \leq |f(x-1)| + \varepsilon \leq M + \varepsilon$$

Donc sur l'intervalle $[A+1, A+2]$ on a $|f(x)| \leq M + \varepsilon$. On démontre plus généralement, par une récurrence évidente, que, pour tout entier naturel p , si $x \in [A+p, A+p+1]$, alors on a

$$|f(x)| \leq M + p\varepsilon \leq M + (x-A)\varepsilon$$

On a donc pour tout $x \geq A$,

$$\frac{|f(x)|}{x} \leq \frac{M}{x} + \frac{x-A}{x}\varepsilon \leq \frac{M}{x} + \varepsilon$$

Comme $\frac{M}{x}$ tend vers 0, on peut trouver $B > A$ tel que $\frac{M}{x} \leq \varepsilon$ pour $x \geq B$. On a alors pour tout $x \geq B$, $\frac{|f(x)|}{x} \leq 2\varepsilon$ ce qui prouve que $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0.

Dans le cas général, on peut poser $g(x) = f(x) - \ell x$ pour se ramener au cas précédent.

5 Oaux divers : comportement à l'infini et uniforme continuité

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Étudier les implications entre les propriétés suivantes :

- (i) f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$;
- (ii) f admet une limite finie en $+\infty$;
- (iii) $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$

Solution de 5 : Oaux divers : comportement à l'infini et uniforme continuité

FGN 3 4.33

- L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est fausse puisque la fonction $x \mapsto x$ est uniformément continue et n'a pas de limite finie en $+\infty$.
- En revanche la réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i) est vraie. En effet, notons ℓ la limite finie de f en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geq A$.

Si x et y sont plus grands que A , on a alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Choisissons alors $\eta > 0$ un ε -module de continuité uniforme pour f sur le segment $[0, A]$ qui est compact (théorème de Heine). Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ tels que $|x - y| \leq \eta$. Si x et y sont dans $[0, A]$ ou dans $[A, +\infty[$ tous les deux on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ et si $x \in [0, A]$ et $y \in [A, +\infty[$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \leq 2\varepsilon$$

Ainsi η est un 2ε -module de continuité uniforme pour f sur $\mathbb{R}_+$.

- L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est triviale et la réciproque est fausse.
- (i) $\Rightarrow$ (iii) est une conséquence de l'exercice 3.
- La réciproque est fausse. Par exemple la fonction bornée $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue : en effet, lorsqu'une fonction f est uniformément continue sur un intervalle I , pour toutes suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I telle que $x_n - y_n \rightarrow 0$, on a $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$. En prenant $x_n = \sqrt{2\pi n}$ et $y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{6}}$, on obtient que $x \mapsto \sin(x^2)$ ne peut être uniformément continue.

6 X Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré au moins 2

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $aP' + bP$ est scindé.
2. Si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, montrer que $\sum_{k=0}^d a_k P^{(k)}$ est scindé.

Solution de 6 : X

Soient $x_1 < \dots < x_n$ les racines de P de multiplicités $m_1, \dots, m_n$.

Alors $x_1, \dots, x_n$ sont racines de P' de multiplicités $m_1 - 1, \dots, m_n - 1$. De plus, le théorème de Rolle nous fournit $n - 1$ autres racines de P' intercalées entre deux racines successives de P : x_k et x_{k+1} .

Cela montre classiquement que P' est scindé (on a trouvé autant de racines comptées avec multiplicité que son degré).

1. Si $a = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, quitte à diviser par a ce qui ne change pas le caractère scindé, on montre que $P' + \alpha P$ est scindé.

On a toujours que $x_1 < \dots < x_n$ sont racines de $P' + \alpha P$ de multiplicités au moins $m_1 - 1, \dots, m_n - 1$. Pour trouver d'autres racines, c'est plus délicat.

Une idée est de reconnaître un début de dérivée de produit (comme dans la technique du facteur intégrant de résolution d'équations différentielles.)

Soit $f : x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$, dérivable, de dérivée $f' : x \mapsto (P'(x) + \alpha P(x))e^{\alpha x}$.

On peut appliquer le théorème de Rolle $n - 1$ fois, entre deux racines successives de P et en déduire $n - 1$ nouvelles racines distinctes de $P' + \alpha P$. Si $\alpha \neq 0$, il en manque une pour en avoir autant comptées avec multiplicité que le degré de $P' + \alpha P$ qui est égal au degré de P . Plusieurs arguments possible pour conclure :

- $P' + \alpha P$ admet nécessairement une dernière racine complexe car est scindé dans $\mathbb{C}$ et si cette dernière n'était pas réelle, son conjugué serait une autres racines différente de toutes les autres ce qui est exclus pour des raisons de degré.
- $P' + \alpha P$ est alors divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par un polynôme de degré $\deg(P' + \alpha P) - 1$. Le quotient est un polynôme réel de degré 1 qui admet une racine réelle, la racine de $P' + \alpha P$ qui nous manquait.
- On peut appliquer une nouvelle fois le théorème de Rolle ou plutôt une de ses extensions car $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ si $\alpha < 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ si $\alpha > 0$, ce qui permet d'appliquer un dernier théorème de Rolle soit entre x_n et $+\infty$, soit entre $-\infty$ et x_1 , ce qui fournit une autre racine de $P' + \alpha P$ différente de toutes celles que l'on avait déjà.

2. Pour la deuxième question, question amusante, qu'on aurait pu poser de manière moins déroutante...

On a

$$\sum_{k=0}^d a_k P^{(k)} = [P(D)](P)$$

Mais $P = \lambda \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i)$, les α_i n'étant pas distincts. Donc

$$[P(D)](P) = \lambda (D - \alpha_q Id) \circ \dots \circ (D - \alpha_1 Id)(P)$$

Or la question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$,

$$[(D - \alpha_q Id) \circ \dots \circ (D - \alpha_1 Id)](P)$$

est scindé...

7 Preuve de l'IAF complexe dans le cas général

On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $|f'| \leq k$ sur $]a, b[$.

$$\text{Pour cela, on considère } \varphi : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \Re \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overline{f(t)} \right) \end{cases}.$$

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finis réelle à φ .

Solution de 7 : Preuve de l'IAF complexe dans le cas général

φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f l'est.

8 Caractérisation des $\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes

Soit $f : I \rightarrow J$ bijective de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$.

Montrer que f est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I .

Solution de 8 : Caractérisation des $\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes

Le sens direct ne pose pas de problème.

Le sens réciproque se prouve par récurrence finie : $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^j$ sur J en utilisant la formule donnant $(f^{-1})'$.

9 Montrer que si f est une fonction convexe et dérivable sur I , alors f' est continue sur I .

On pourra appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+h$ et utiliser le fait qu'une fonction croissante a des limites à gauche et à droite.

Solution de 9 :

Soit x un point intérieur à I . La fonction f est convexe et dérivable sur I . Sa fonction dérivée f' est donc croissante sur cet intervalle.

Par théorème de la limite monotone, une fonction croissante admet toujours une limite à gauche et une limite à droite en tout point.

$$\begin{aligned} f'(t) &\xrightarrow{t \rightarrow x^+} \ell_d \\ f'(t) &\xrightarrow{t \rightarrow x^-} \ell_g \end{aligned}$$

La croissance de f' donne

$$\ell_g \leq f'(x) \leq \ell_d.$$

Soit $h > 0$. Par théorème des accroissements finis à la fonction f sur le segment $[x, x+h]$ (continue sur ce segment et dérivable sur son intérieur), il existe $c_h \in]x, x+h[$ tel que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(c_h).$$

En faisant tendre h vers 0^+ , par encadrement, c_h tend vers x^+ , donc $f'(c_h) \rightarrow \ell_d$. Or f est dérivable au point x , donc par unicité de la limite,

$$f'(x) = \ell_d.$$

On montre de même que

$$f'(x) = \ell_g.$$

Ainsi f' est continue à gauche et à droite donc continue en tout point de I .

Bien sûr, si x est une borne de I , il suffit de ne regarder la continuité que d'un côté.

10 Fonctions mid-convexes

Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.

On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x, y) = \left\{ t \in [0, 1] \mid f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \right\}$$

contient tous les $\frac{k}{2^n} \dots$

Montrer l'induction par récurrence puis utiliser un argument de densité.

Solution de 10 : Fonctions mid-convexes

Il n'y a qu'un sens intéressant.

Méthode 1 On voit assez facilement que si on itère l'application de

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

on obtient par exemple :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+y)+y\right)\right) &\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)+f(y)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f(x)+f(y))+f(y)\right) \end{aligned}$$

ce qui se résume à

$$f\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y\right) \leq \frac{1}{4}f(x) + \frac{3}{4}f(y)$$

d'où l'idée de démontrer, par récurrence sur n :

$$\forall n \geq 0 \quad \forall k \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket \quad \forall (x, y) \in I^2 \quad f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$$

La récurrence n'est pas difficile à établir : il suffit de dire que, si k et k' sont dans $\llbracket 0, 2^n \rrbracket$, on a

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) + \left(\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right)y\right)\right)\right) \leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) + f\left(\frac{k'}{2^n}x + \left(1 - \frac{k'}{2^n}\right)y\right)\right)$$

on simplifie, on utilise la propriété à l'étape n , on en déduit la propriété à l'étape $n+1$.

Pour conclure, on utilise alors la continuité de f et la densité de l'ensemble $\left\{\frac{k}{2^n} ; 0 \leq k \leq 2^n\right\}$ dans $[0, 1]$ (qui se démontre comme dans l'exercice de topologie sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$).

Méthode 2 (Beaucoup plus graphique, mais demande des notions de topologie). On raisonne par l'absurde, en supposant que f ne soit pas convexe. On fixe alors $x < y$ dans I et $t_0 \in]0, 1[$ tels que

$$f(t_0x + (1 - t_0)y) > t_0f(x) + (1 - t_0)f(y)$$

Par continuité de f ,

$$A = \{u \in [0, t_0] ; f(ux + (1 - u)y) = uf(x) + (1 - u)f(y)\}$$

est un fermé relatif de $[0, t_0]$ (image réciproque d'un fermé par une application continue), donc un fermé (un fermé relatif A d'un fermé F est l'intersection avec ce fermé F d'un fermé G , donc est fermé). Non vide car il contient 0. Il a donc un plus grand élément (il est non vide majoré, il a donc une borne supérieure, qu'il contient car il est fermé). On appelle t_1 cet élément, et on note $x_1 = t_1x + (1 - t_1)y$ (évidemment, on ne fait que décrire ce qu'on voit sur un dessin : x_1 est l'abscisse du dernier point avant $t_0x + (1 - t_0)y$ en lequel la corde $[(x, f(x)), (y, f(y))]$ rencontre la courbe).

De même,

$$B = \{u \in [t_0, 1] ; f(ux + (1 - u)y) = uf(x) + (1 - u)f(y)\}$$

a un plus petit élément t_2 , et on note $x_2 = t_2x + (1 - t_2)y$ (x_2 est l'abscisse du premier point après $t_0x + (1 - t_0)y$ en lequel la corde $[(x, f(x)), (y, f(y))]$ rencontre la courbe).

Sur $]t_1, t_2[$, l'application continue

$$u \mapsto f(ux + (1 - u)y) - uf(x) - (1 - u)f(y)$$

ne s'annule pas et est continue, donc garde un signe constant strict d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc est strictement positif (c'est son signe en t_0). En particulier en $(t_1 + t_2)/2$, ce qui donne finalement

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

11 **X** Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $a < b$. À quelle condition a-t-on $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Dans le cas complexe, on pourra écrire

Solution de 11 : X

Le cas réel se traite bien en séparant les cas selon le signe de $\int_a^b f$.

Pour le cas complexe, c'est moins évident. On est confronté à la recherche de cas d'égalité d'une inégalité classique : l'inégalité triangulaire.

Comme toujours dans ce genre de situations, l'idée est de transformer en égalité les inégalités de la dite preuve... Qu'il faut retrouver, donc...

On peut démontrer le résultat en écrivant sous forme trigonométrique $\int_a^b f = \left| \int_a^b f \right| e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\mathbb{R} \ni \left| \int_a^b f \right| = \int_a^b f e^{-i\theta} = \Re \left(\int_a^b e^{-i\theta} f \right) = \int_a^b \Re(e^{-i\theta} f) \leq \int_a^b |e^{-i\theta} f| = \int_a^b |f|.$$

Le cas d'égalité apparaît lorsque la fonction continue, réelle, à valeur positive et d'intégrale nulle $|e^{-i\theta} f| - \Re(e^{-i\theta} f)$ est constamment nulle sur $[a, b]$.

Cela signifie que pour tout $x \in [a, b]$, $e^{-i\theta} f(x) \in \mathbb{R}^+$.

Les fonctions solutions sont donc les fonctions qui s'écrivent $x \mapsto g(x)e^{i\theta}$ où $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

12 Lemme de Grönwall

Soient $f, g \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ telles que $f, g \geq 0$ et $C > 0$. On suppose que

$$\forall x \geq 0, f(x) \leq C + \int_0^x f(t)g(t)dt.$$

Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \leq C e^{\int_0^x g(t)dt}$.

$$\text{Étudier } h : x \mapsto \left(C + \int_0^x f(t)g(t)dt \right) e^{-\int_0^x g(t)dt}.$$

Solution de 12 : Lemme de Grönwall

$$\text{Étudier } h : x \mapsto \left(C + \int_0^x f(t)g(t)dt \right) e^{-\int_0^x g(t)dt}.$$

13 Centrale

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Solution de 13 : Centrale

Faire apparaître $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right)$ et utiliser l'uniforme continuité de f' (théorème de Heine).

14 ENS MPI 2025

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall n \geq 1, S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Quelle est la limite de $(S_n)_n$? Majoration de la différence ? Le démontrer.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, 1-périodique.
Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S_n - \int_0^1 f \right| \leq \frac{C}{n^2}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, 1-périodique.
Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S_n - \int_0^1 f \right| \leq \frac{C}{n^3}$.
4. Que dire si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique ?

Solution de 14 : ENS MPI 2025

1. C'est du cours : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$ (sommes de Riemann) et

$$\forall n \geq 1, \left| S_n - \int_0^1 f \right| \leq M_1 \times (1-0) \times \underbrace{\frac{1}{n}}_h = \frac{M_1}{n}$$

où $M_1 = \max_{[0,1]} |f'|$ dont l'existence est assurée par le théorème des bornes atteintes.

Preuve : soit $n \geq 1$,

$$\left| S_n - \int_0^1 f \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| dt$$

L'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| \leq M_1 \left| \frac{k}{n} - t \right| = M_1 \left(t - \frac{k}{n} \right)$$

donc

$$\left| S_n - \int_0^1 f \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2n^2} = \boxed{\frac{M_1}{2n}}$$

Remarque : on aurait pu directement majorer $t - \frac{k}{n}$ par $\frac{1}{n}$ et obtenir comme majorant $\frac{M_1}{n}$ final. On cherche dans ce corrigé à réduire les constantes, mais des majorations plus grossières seraient acceptées le jour de l'oral.

2. Pour f de classe $\mathcal{C}^2$, on veut améliorer l'approximation de $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right|$. On pense à la formule de Taylor avec reste intégral sur $\left[\frac{k}{n}, t \right]$ qui donne

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right) \left(t - \frac{k}{n} \right) + R_{k,n}(t)$$

avec $R_{k,n}(t) = \int_{\frac{k}{n}}^t (t-u) f''(u) du$, donc, en notant $M_2 = \max_{[0,1]} |f''|$, $|R_{k,n}(t)| \leq M_2 \int_{\frac{k}{n}}^t (t-u) du = \frac{M_2}{2} \left(t - \frac{k}{n} \right)^2$.

La difficulté maintenant va être d'utiliser ce résultat pour améliorer la majoration, mais rentrer les valeurs absolues dans la somme. En effet, pour gérer le terme en f' en conservant un terme en $\frac{1}{n^2}$, on ne peut pas se contenter de majorer $\left| f'\left(\frac{k}{n}\right) \right|$ par M_1 .

L'idée très astucieuse qui va utiliser la 1-périodicité est d'appliquer la première question à f' :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f' \right| \leq \frac{M_2}{2n}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \left| S_n - \int_0^1 f \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right) dt \right| = \left| - \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n} \right) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} R_{k,n}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2n^2} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{M_2}{2} \left(t - \frac{k}{n} \right)^2 dt \\ &\leq \frac{M_2}{4n^2} + \frac{M_2}{6n^2} = \boxed{\frac{5M_2}{12n^2}} \end{aligned}$$

3. On applique de nouveau l'idée de la question précédente : formule de Taylor avec reste intégral et utilisation des questions précédentes. Avec f de classe $\mathcal{C}^3$,

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right) \left(t - \frac{k}{n} \right) + f''\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\left(t - \frac{k}{n} \right)^2}{2} + R'_{k,n}(t)$$

avec $R'_{k,n}(t) = \int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2} f'''(u) du$.

La 1-périodicité de f et de f' et les deux questions précédentes donnent

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f' \left(\frac{k}{n} \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f' \left(\frac{k}{n} \right) - \int_0^1 f' \right| \leq \frac{5M_3}{12n^2}$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'' \left(\frac{k}{n} \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'' \left(\frac{k}{n} \right) - \int_0^1 f'' \right| \leq \frac{M_3}{2n}$$

où on a noté $M_3 = \max_{[0,1]} |f'''|$

On a alors,

$$\begin{aligned} \left| S_n - \int_0^1 f \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f \left(\frac{k}{n} \right) - f(t) \right) dt \right| = \left| - \sum_{k=0}^{n-1} f' \left(\frac{k}{n} \right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n} \right) dt - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f'' \left(\frac{k}{n} \right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n} \right)^2 dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} R'_{k,n}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2n^2} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f' \left(\frac{k}{n} \right) \right| + \frac{1}{6n^3} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f'' \left(\frac{k}{n} \right) \right| + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{\frac{k}{n}}^t (t-u)^2 M_3 du dt \\ &\leq \frac{5M_3}{24n^3} + \frac{M_3}{12n^3} + \frac{M_3}{24n^3} = \boxed{\frac{M_3}{3n^3}} \end{aligned}$$

4. Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique, on en déduit par récurrence que

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, S_n = \int_0^1 f + \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^k} \right).$$