

TD * FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

1 ENS

Trouver les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$.

2 X-ENS : problèmes de points fixes

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $[0, 1] \subset f([0, 1])$ ou $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, alors f a un point fixe dans $[0, 1]$.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment.
3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ croissante. Montrer que f a un point fixe.
4. Soit $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.
5. On garde les mêmes hypothèses et on suppose de plus f monotone. Montrer que f et g ont un point fixe commun.

3 Très classique

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq ax + b.$$

4 X-ENS : théorème de Césaro continu

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer, en commençant par traiter le cas $\ell = 0$, que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

5 Oaux divers : comportement à l'infini et uniforme continuité

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Étudier les implications entre les propriétés suivantes :

- (i) f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$;
- (ii) f admet une limite finie en $+\infty$;
- (iii) $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow +\infty}(x)$

6 X Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré au moins 2

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $aP' + bP$ est scindé.

2. Si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, montrer que $\sum_{k=0}^d a_k P^{(k)}$ est scindé.

7 Preuve de l'IAF complexe dans le cas général

On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $|f'| \leq k$ sur $]a, b[$.

$$\text{Pour cela, on considère } \varphi : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \Re \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overline{f(t)} \right) \end{cases}.$$

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finis réelle à φ .

8 Caractérisation des $\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes

Soit $f : I \rightarrow J$ bijective de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$.

Montrer que f est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I .

9 Montrer que si f est une fonction convexe et dérivable sur I , alors f' est continue sur I .

10 Fonctions mid-convexes

Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.

On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x, y) = \left\{ t \in [0, 1] \mid f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \right\}$$

contient tous les $\frac{k}{2^n}$...

11 **X** Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $a < b$. À quelle condition a-t-on $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? si

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Dans le cas complexe, on pourra écrire $\int_a^b f = \int_a^b |f| e^{i\theta} = \int_a^b |f| \cos \theta + i \int_a^b |f| \sin \theta$.

12 Lemme de Grönwall

Soient $f, g \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ telles que $f, g \geq 0$ et $C > 0$. On suppose que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq C + \int_0^x f(t)g(t)dt.$$

Montrer que $\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq C e^{\int_0^x g(t)dt}$.

Étudier la fonction $f(x) = C + \int_0^x f(t)g(t)dt$.

13 Centrale

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Réponse attendue : $\frac{1}{2} \left(f(1)^2 - f(0)^2 \right)$ (théorème de Heron).

14 ENS MPI 2025

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall n \geq 1, \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Quelle est la limite de $(S_n)_n$?

Majoration de la différence ? Le démontrer.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, 1-périodique.

Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \int_0^1 f \right| \leq \frac{C}{n^2}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, 1-périodique.

Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \int_0^1 f \right| \leq \frac{C}{n^3}$.

4. Que dire si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique ?