

Suites

1 Centrale

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\gamma \in]-1, 1[$. Montrer $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \iff a_{n+1} - \gamma a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Indication : preuve type Césaro...

Solution de 1 : Centrale

Seule l'implication de droite à gauche est intéressante. Notons

$$u_n = a_{n+1} - \gamma a_n$$

et essayons d'exprimer a_n à l'aide des u_p (l'hypothèse est que la suite (u_n) converge vers 0) : $a_1 = u_0 + \gamma a_0$, $a_2 = u_1 + \gamma a_1 = u_1 + \gamma u_0 + \gamma^2 a_0$, puis, par récurrence :

$$a_n = u_{n-1} + \gamma u_{n-2} + \gamma^2 u_{n-3} + \dots + \gamma^{n-1} u_0 + \gamma^n a_0$$

Pour la suite de d'exercice, on constate que quand n est grand u_n et γ^n sont petits. Mais c'est quand même un peu délicat à écrire. Soit $\varepsilon > 0$; soit p_0 tel que

$$\forall k \geq p_0 \quad |u_k| \leq \varepsilon$$

et, d'autre part, soit M tel que $\forall k \in \mathbb{N} \quad |u_k| \leq M$ (la suite (u_n) converge, donc est bornée). Supposons $n > p_0$; on peut alors majorer

$$|a_n| \leq \varepsilon(1 + |\gamma| + \dots + |\gamma|^{n-p_0-1}) + M(|\gamma|^{n-p_0} + \dots + |\gamma|^{n-1}) + |a_0||\gamma|^n$$

et donc, en utilisant des sommes géométriques :

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-|\gamma|} + M \frac{|\gamma|^{n-p_0}}{1-|\gamma|} + |a_0||\gamma|^n$$

Comme $0 \leq |\gamma| < 1$, la suite $(|\gamma|^n)$ converge vers 0, il existe donc un rang n_0 à partir duquel

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-|\gamma|} + \frac{\varepsilon}{1-|\gamma|}$$

et au début, on aurait pu prendre $(1-|\gamma|)\varepsilon/2$ à la place de ε , on conclut.

2 Mines - Centrale - X Soit, pour $n \geq 2$, $P_n = X^n - X - 1$.

Démontrer que P_n a une unique racine réelle positive u_n . Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à trois termes de u_n (la limite étant le premier de ces trois termes).

Solution de 2 : Mines - Centrale - X

P_n a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Elle est négative en 0, et continue, donc s'annule par théorème des valeurs intermédiaires. Elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois, et donc a une plus grande racine réelle u_n .

$P_n(1) < 0$, $P'_n > 0$ sur $]1, +\infty[$, et, si $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang $P_n(1 + \varepsilon) > 0$ (croissances comparées). Donc, à partir d'un certain rang, $1 \leq u_n \leq 1 + \varepsilon$. On en déduit

$$u_n = 1 + o(1)$$

Écrivons alors $\varepsilon_n = u_n - 1 \rightarrow 0$. Comme

$$(1 + \varepsilon_n)^n = 1 + n\varepsilon_n + 1 = 2 + \varepsilon_n$$

il semble assez commode, pour développer, de prendre les logarithmes des deux membres (qui sont bien strictement positifs, au moins à partir d'un certain rang). On obtient

$$n \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln(2 + \varepsilon_n) \quad (1)$$

Le premier membre de l'égalité est équivalent à $n\varepsilon_n$ (car $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$), le second membre est équivalent à $\ln 2$ (car il tend vers cette limite, non nulle). Donc

$$\varepsilon_n \sim \frac{\ln 2}{n}$$

On obtient

$$u_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et on en voudrait un peu plus. Développons donc (1) un peu plus loin :

$$n\varepsilon_n - n \frac{\varepsilon_n^2}{2} + o(n\varepsilon_n^2) = \ln 2 + \frac{\varepsilon_n}{2} + o(\varepsilon_n)$$

Mais l'équivalent trouvé plus haut nous permet d'affirmer que les deux o sont des $o(1/n)$. Qui plus est,

$$n\varepsilon_n^2 \sim \frac{(\ln 2)^2}{n}$$

ce qui peut s'écrire

$$n\varepsilon_n^2 = \frac{(\ln 2)^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc

$$n\varepsilon_n = \frac{(\ln 2)^2}{2n} + \ln 2 + \frac{\varepsilon_n}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(\ln 2)^2}{2n} + \ln 2 + \frac{\ln 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On remet les choses en ordre, et on obtient :

$$u_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(\ln 2)^2 + \ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3**Mines - Centrale - X** Soit, pour $n \geq 2$, $P_n = X^n - nX + 1$.

Démontrer que P_n a une plus grande racine réelle u_n . Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à deux termes de u_n (la limite étant le premier de ces deux termes).

Solution de 3 : Mines - Centrale - X

P_n a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Elle est négative en 1, et continue, donc s'annule par théorème des valeurs intermédiaires. Elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois, et donc a une plus grande racine réelle u_n .

On a d'autre part $u_n > 1$ dès que $n > 2$ car $P_n(1) = 2 - n < 0$.

On a $P'_n(x) = n(x^{n-1} - 1) > 0$ sur $]1, +\infty[$, et, si $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang $P_n(1 + \varepsilon) > 0$ (croissances comparées). Donc, à partir d'un certain rang, $1 \leq u_n \leq 1 + \varepsilon$. On en déduit

$$u_n = 1 + o(1)$$

Écrivons alors $u_n = 1 + \varepsilon_n$. On a

$$(1 + \varepsilon_n)^n = n(1 + \varepsilon_n) - 1$$

Prenons les logarithmes des deux membres :

$$n \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln n + \ln(1 + \varepsilon_n - 1/n)$$

Le premier membre de l'égalité est équivalent à $n\varepsilon_n$ (car $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$), le second membre est équivalent à $\ln n$. Donc

$$\varepsilon_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

On obtient

$$u_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

4**Mines - X** Soit, pour $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n x^k - 1$.

Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif tel que $f_n(x_n) = 0$.

Étudier la suite (x_n) et en donner un développement asymptotique à deux termes.

Solution de 4 : Mines - X

f_n est strictement croissante, vaut -1 en 0, a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. D'où, par théorème des valeurs intermédiaires (il est clair que f_n est continue) l'existence et l'unicité de x_n . On constate que $x_n < 1$ si $n > 1$. Mais aussi,

$$f_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} - 1 = \frac{-1 + 2x - x^{n+1}}{1 - x}$$

Donc

$$x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \tag{1}$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$; $f_n(1 - \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2\alpha}{\alpha}$. Donc, si $\alpha < 1/2$, à partir d'un certain rang on a $f_n(1 - \alpha) > 0$, et donc $x_n < 1 - \alpha$. En fait, on aurait pu se contenter de remarquer que $f_n < f_{n+1}$ sur $\mathbb{R}_*^+$, ce

qui donne $0 < f_{n+1}(x_n)$, et donc $x_{n+1} < x_n$ (variations de f_n). On a donc la convergence de (x_n) vers $\ell \in [0, 1[$. Mais, dans (1), on a nécessairement $(2x_n - 1)$ qui converge vers 0 (le premier membre converge vers 0). Donc $\ell = 1/2$. Posons

$$x_n = \frac{1}{2} + \varepsilon_n$$

où (ε_n) converge vers 0. On a

$$(n+1)\ln\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right) = \ln(2) + \ln(\varepsilon_n)$$

qui donne déjà

$$\ln(\varepsilon_n) \sim -n \ln 2 \quad (2)$$

mais cela ne suffit pas (on ne peut pas prendre des exponentielles d'équivalents). Mais, repartant sur la relation (1) (sans prendre les logarithmes), on a

$$2\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \exp((n+1)\ln(1+2\varepsilon_n))$$

Mais $(n+1)\ln(1+2\varepsilon_n) \sim 2n\varepsilon_n$ et $n\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (prendre le logarithme de $n\varepsilon_n$, (2) montre qu'il tend vers $-\infty$). On obtient

$$\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^{n+2}}$$

ce qui donne le deuxième terme du développement asymptotique.

5 ENS

Caractériser les suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ telles qu'il existe une permutation σ pour laquelle la suite $(u_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$ est monotone à partir d'un certain rang.

Solution de 5 : ENS

Voir aussi FGN Analyse 1 – 2.2 On procède par Analyse-Synthèse.

Analyse Si on se donne une telle suite, alors, par théorème de la limite monotone, la suite $(u_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$ a une limite ℓ finie ou $\pm\infty$.

On montre que $u_n \rightarrow \ell$. Traitons le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ (les autres cas se traitent de manière similaire).

Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_{\sigma(n)} - \ell| \leq \varepsilon$.

Posons $N' = \max_{0 \leq k \leq N-1} \sigma(k)$. Alors pour $n > N'$, n s'écrit $\sigma(n')$ avec $n' \notin \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

De plus, à partir d'un certain rang, tous les $u_{\sigma(n)}$ se situent « du même côté » de cette limite, et même strictement si la suite n'est pas stationnaire.

Synthèse Soit (u_n) une suite ayant une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si la suite est stationnaire, $\sigma = \text{id}_{\mathbb{N}}$ convient.

Sinon, supposons que tous les termes sont strictement du même côté que ℓ à partir du rang N .

On suppose par exemple que pour tout $n \geq N$, $u_n < \ell \in \mathbb{R}$.

L'idée va être de prendre des indices successifs pour lesquels on puisse écrire

$$\frac{1}{k+1} \leq \ell - u_n < \frac{1}{k}.$$

Soit pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \left\{ n \geq N, \ell - \frac{1}{k} < u_n \leq \ell - \frac{1}{k+1} \right\}$ et $A_0 = \{n \geq N, u_n \leq \ell - 1\}$. La convergence de (u_n) implique que tous ces ensembles soient finis, et ils partitionnent $\llbracket N, +\infty[$. On peut alors définir la bijection σ en posant $\sigma(n) = n$ sur $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$, puis en prenant les indices de A_0 classés par ordre croissant de u_n , puis ceux de A_1 , et ainsi de suite. Pour le cas où $\ell = +\infty$, il suffit de partitionner par exemple avec $\{n \geq N, k < u_n \leq k+1\}$.

Conclusion Les suites recherchées sont les suites stationnaires ou ayant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ et étant toujours strictement inférieur ou toujours strictement supérieur à cette limite.

6 X - Suites convexes bornées

On considère une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note pour $n \geq 0$, $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$ et

$$\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}.$$

On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geq 0$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $n\Delta u_n$ converge vers 0.
2. Montrer que la série $\sum (n+1)\Delta^2 u_n$ converge.

Solution de 6 : X - Suites convexes bornées

Voir aussi FGN Analyse 1 – 2.5

1. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geq 0$, la suite (Δu_n) est croissante.

Comme u est bornée, Δu l'est aussi.

Elle converge donc vers un réel ℓ .

Pour faire apparaître un télescopage, on utilise le théorème de Cesàro appliqué à Δu , ce qui conduit à $\frac{u_0 - u_n}{n} \rightarrow \ell$.

Le fait que u soit bornée impose que $\ell = 0$.

Donc Δu tend vers 0 en décroissant et est donc positive : u décroît. Et comme elle est bornée, elle converge vers une limite ℓ' .

Pour montrer que $n\Delta u_n \rightarrow 0$, on commence par s'intéresser à sa moyenne de Cesàro, et on pourra conclure grâce à la monotonie de Δu (la réciproque de Cesàro est vrai avec une hypothèse de monotonie!).

On calcule $\sum_{k=0}^{n-1} k\Delta u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - (n-1)u_n$ donc $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\Delta u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \frac{n-1}{n} u_n \rightarrow \ell' - \ell' = 0$.

Par décroissance de Δu , $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\Delta u_k \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right) \Delta u_n = \frac{n}{2} \Delta u_n \geq 0$ donc $n\Delta u_n \rightarrow 0$.

2. On calcule

$$\sum_{k=0}^n (k+1)\Delta^2 u_k = u_0 - u_{n+1} - (n+1)\Delta u_{n+1} \longrightarrow u_0 - \ell'.$$

7 X Convergence et limite de $u_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k^n$.

Solution de 7 : X

Voir aussi FGN Analyse 1 – 2.17

On remarque que

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^n.$$

Comme $\left(1 - \frac{k}{n} \right)^n \rightarrow e^{-k}$, on est tenté de penser que

$$u_n \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}.$$

Par l'inégalité de concavité classique $\ln(1+x) \leq x$, on a déjà

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} \leq \frac{e}{e-1}$$

Reste à minorer. Soit $N \geq 0$. Pour $n \geq N$,

$$u_n \geq \sum_{k=0}^N \left(1 - \frac{k}{n} \right)^n = v_n.$$

Or

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_N = \sum_{k=0}^N e^{-k} = \frac{e - e^{-N-1}}{e-1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{e}{e-1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a N tel que $\ell_N \geq \frac{e}{e-1} - \varepsilon$.

Puis, avec $v_n \rightarrow \ell_N$, à partir d'un certain rang $N' > N$, $v_n \geq \ell_N - \varepsilon \geq \frac{e}{e-1} - 2\varepsilon$, et alors, si $n \geq N'$,

$$\frac{e}{e-1} - 2\varepsilon \leq u_n \leq \frac{e}{e-1}$$

ce qui permet de conclure.

8 X 2025 MP

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \rightarrow 0$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Solution de 8 : X 2025 MP

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{2^{n-1-k}} + \frac{u_0}{2^n}$ et on montre que le premier terme dans vers 0 dans une preuve de type Césàro.

C'est en fait un cas particulier de l'exercice 1.

9

Mines-Ponts 2025 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que P_n n'a pas de racine réelle si n est pair, et a une unique racine réelle sinon.
2. On note x_n la racine réelle de P_{2n+1} . Montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.

Solution de 9 : Mines-Ponts 2025

Indications :

1. (a) Calculer P'_n et observer la relation directe avec le polynôme du rang précédent.
 (b) Construire une récurrence démontrant simultanément que P_{2m} est strictement positif sur $\mathbb{R}$ et que P_{2m+1} admet une unique racine.
 (c) Pour l'hérédité, utiliser la racine de P_{2m-1} pour localiser le minimum global de P_{2m} .
 (d) Évaluer le polynôme pair en ce minimum pour prouver sa stricte positivité.
 (e) Dédire de cette positivité la stricte monotonie de P_{2m+1} et conclure avec le théorème de la bijection.
2. (a) Exprimer $P_{2n+3}(x_n)$ en utilisant l'égalité $P_{2n+1}(x_n) = 0$ pour isoler les deux termes de plus haut degré.
 (b) Factoriser cette expression pour montrer que le signe de la quantité $P_{2n+3}(x_n)$ dépend de l'inégalité $x_n > -(2n+3)$.
 (c) Regrouper les termes de l'expression $P_{2n+1}(x_n)$ par paires d'indices consécutifs.
 (d) Utiliser cette réécriture pour minorer strictement x_n par $-(2n+1)$ en raisonnant par l'absurde.
 (e) Conclure sur la décroissance de la suite en exploitant le signe obtenu et les variations de la fonction P_{2n+3} .
 (f) Pour la limite, fixer un réel arbitraire $A < 0$ et étudier la convergence de la suite $P_{2n+1}(A)$ par comparaison avec l'exponentielle.
 (g) Invoquer l'inégalité de Taylor-Lagrange sur le segment $[A, 0]$ pour prouver que la quantité $P_{2n+1}(A)$ devient strictement positive à partir d'un certain rang.
 (h) Exploiter la croissance stricte du polynôme pour obtenir la majoration $x_n < A$ et conclure.

10

Mines-Ponts 2025 Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b > a \geq 1$. Déterminer la limite de la suite

de terme général $\sum_{k=an+1}^{bn} \ln\left(1 - \frac{k}{n^2}\right)$.

Solution de 10 : Mines-Ponts 2025

Indications :

Comme, à k fixé, $\ln\left(1 - \frac{k}{n^2}\right) \sim -\frac{k}{n^2}$, on pense à comparer la somme cherchée à $\sum_{k=an+1}^{bn} -\frac{k}{n^2}$

dont la limite est plus facile à calculer.

Pour estimer, la différence, utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

11

Mines-Ponts 2025

Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{n+k}{2 + \sin(n+k) + (n+k)^2}$.

Solution de 11 : Mines-Ponts 2025

- Remarquer que ça ressemble sacrément à $\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$ dont la limite est plus facile à calculer en reconnaissant un type de somme classique.
- Réduire au même dénominateur la différence entre le terme général de l'énoncé et $\frac{1}{n+k}$.
- En déduire que l'écart entre les deux sommes tend vers zéro.

12

Mines-Ponts 2025

On considère une suite réelle u vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}$.

- Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 1$.
- Montrer que u est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle est convergente, et déterminer sa limite.

Solution de 12 : Mines-Ponts 2025

Indications :

- Supposer par l'absurde que la suite reste majorée par 1.
 - Exploiter l'inégalité $x \leq \sqrt{x}$ valable sur $]0, 1]$ pour minorer $u_{n+1} - u_n$.
 - Sommer ces inégalités pour faire apparaître une série harmonique divergente et obtenir une contradiction.
- Démontrer d'abord la stabilité de l'intervalle $]1, +\infty[$ par l'application de la récurrence.
 - Étudier le signe de la fonction $x \mapsto x - \sqrt{x}$ pour isoler la différence $\sqrt{u_n} - u_n$.
 - Justifier à l'aide de la question précédente que la suite reste strictement supérieure à 1 à partir d'un certain rang.
 - Supposer par l'absurde que la suite est strictement croissante sur cette plage d'indices.
 - Déterminer les limites éventuelles de la suite sous cette hypothèse de croissance.
 - Isoler la quantité $u_n - \sqrt{u_n}$ dans l'expression de $u_{n+1} - u_n$ pour aboutir à une contradiction sur le signe.
 - En déduire l'existence d'un rang p pour lequel l'inégalité $u_{p+1} \leq u_p$ est vérifiée.
 - Évaluer le signe de la différence $u_{p+2} - u_{p+1}$.
 - Conclure sur la propagation de la décroissance à tous les rangs ultérieurs par récurrence.

Méthode de Raphaël pour contredire la stricte croissance : $x \mapsto x - \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Obtenir une contradiction en l'appliquant à u_n .

13 Mines-Ponts 2025

Soit (a_n) définie par $a_0 = 0, a_1 = 1$, et, pour $n \geq 1$, $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$.

1. Montrer que, pour tout n , $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$.
2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{4a_k^2}\right)$. Exprimer S_n en fonction de a_n et a_{n+1} .
3. Montrer que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{12}$.

Solution de 13 : Mines-Ponts 2025

Indications :

1. Procéder par récurrence en remplaçant a_{n+2} par sa définition.
2. (a) Évaluer la différence $\operatorname{Arctan}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)$ avec la formule d'addition.
(b) Simplifier l'argument de l'arctangente en utilisant l'invariant de la question 1. et la relation de récurrence initiale.
(c) Identifier l'argument obtenu avec celui de l'énoncé pour transformer S_n en somme télescopique.
3. Conclure en exprimant la terme général a_n en fonction de n .