

Suites

1 Centrale

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\gamma \in]-1, 1[$. Montrer $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff a_{n+1} - \gamma a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Indication : preuve type Cauchy...

2 Mines - Centrale - X Soit, pour $n \geq 2$, $P_n = X^n - X - 1$.

Démontrer que P_n a une unique racine réelle positive u_n . Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à trois termes de u_n (la limite étant le premier de ces trois termes).

3 Mines - Centrale - X Soit, pour $n \geq 2$, $P_n = X^n - nX + 1$.

Démontrer que P_n a une plus grande racine réelle u_n . Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à deux termes de u_n (la limite étant le premier de ces deux termes).

4 Mines - X Soit, pour $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n x^k - 1$.

Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif tel que $f_n(x_n) = 0$.

Étudier la suite (x_n) et en donner un développement asymptotique à deux termes.

5 ENS

Caractériser les suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ telles qu'il existe une permutation σ pour laquelle la suite $(u_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$ est monotone à partir d'un certain rang.

6 X - Suites convexes bornées

On considère une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note pour $n \geq 0$, $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$ et $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geq 0$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $n \Delta u_n$ converge vers 0.

2. Montrer que la série $\sum (n+1) \Delta^2 u_n$ converge.

7 X Convergence et limite de $u_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k^n$.

8 X 2025 MP

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \rightarrow 0$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

9 X 2025 MPI

Soient $a < b$ réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $t \in [a, b]$, il existe une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers tels que $t u_n - k_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

10 Mines-Ponts 2025 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que P_n n'a pas de racine réelle si n est pair, et a une unique racine réelle sinon.
2. On note x_n la racine réelle de P_{2n+1} . Montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.

11 Mines-Ponts 2025 Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b > a \geq 1$. Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum_{k=a+1}^{bn} \ln\left(1 - \frac{k}{n^2}\right)$.

12 Mines-Ponts 2025

Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{n+k}{2 + \sin(n+k) + (n+k)^2}$.

13 Mines-Ponts 2025

On considère une suite réelle u vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}$.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 1$.
2. Montrer que u est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle est convergente, et déterminer sa limite.

14 Mines-Ponts 2025

Soit (a_n) définie par $a_0 = 0, a_1 = 1$, et, pour $n \geq 1$, $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$.

1. Montrer que, pour tout n , $a_n^2 - a_{n-1} a_{n+1} = 1$.

2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{4a_k^2}\right)$. Exprimer S_n en fonction de a_n et a_{n+1} .

3. Montrer que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{12}$.