Calcul différentiel [II]

Exercices traités en cours

1 Montrer que $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & M^2\end{array}\right.$ est différentiable en toute $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{d}f(A)$.

Solution de 1 :

$(A+H)^2 = A^2+AH+HA+H^2$ avec $H\mapsto AH+HA$ linéaire et en choisissant une norme sous-multiplicative (elles sont toutes équivalentes), $0\leqslant \left\|H^2\right\|\leqslant \|H\|^2$ donc $\dfrac{\left\|H^2\right\|}{\|H\|}\to 0$ et $H^2=\mathrm{o}(H)$. Donc f est différentiable en A et $\mathrm{d}f(A): H\mapsto AH+HA$.

2 Montre que, si E est un espace euclidien $f:\left|\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \|x\|^2\end{array}\right.$ est différentiable en toute $a\in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$.

Solution de 2 :

$\|a+h\|^2 = \|a\|^2+2(a|h)+\|h\|^2$ avec $h\mapsto 2(a|h)$ linéaire et $\|h\|^2=\mathrm{o}(h)$. Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a): h\mapsto 2(a|h)$.

3 Montrer que, si E est un espace euclidien, $u\in\mathscr{L}(E)$, $f:\left|\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (x|u(x))\end{array}\right.$ est différentiable en toute $a\in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$. Que se passe-t-il si, de plus, u est symétrique ?

Solution de 3 :

$(a+h|u(a+h)) = (a|u(a))+(h|u(a))+(a|u(h))+(h|u(h))$ avec $h\mapsto(h|u(a))+(a|u(h))$ linéaire et $|(h|u(h))|\leqslant\|h\|\,\|u(h)\|$ par Cauchy-Schwarz (pour le norme euclidienne associée au produit scalaire) et comme $\|u(h)\|\to 0$ par continuité, $(h|u(h))=\mathrm{o}(h)$.

Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a): h\mapsto(h|u(a))+(a|u(h))$, ce qui devient $2(u(a)|h)$ si de plus u est symétrique.

Différentielle

4 Montrer que $f: M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mapsto M^{\intercal}M$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Solution de 4 :

$(M+H)^{\intercal}(M+H) = M^{\intercal}M+M^{\intercal}H+H^{\intercal}M+H^{\intercal}H$ avec $H\mapsto M^{\intercal}H+H^{\intercal}M$ linéaire et en choisissant une norme sous-multiplicative (elles sont toutes équivalentes), $0\leqslant\|H^{\intercal}H\|\leqslant\|H^{\intercal}\|\|H\|$ donc $\dfrac{\|H^{\intercal}H\|}{\|H\|}\to 0$ et $H^{\intercal}H=\mathrm{o}(H)$.

Donc f est différentiable en M et $\mathrm{d}f(A): H\mapsto M^{\intercal}H+H^{\intercal}M$.

Une autre solution est de tirer parti de la bilinéarité du produit matriciel : $(A,B)\mapsto A\times B$. Comme les applications identité id et de transposition T sont linéaires, elles sont différentiables et de différentielle en tout point elle-même.

Alors f l'est et pour tout $M,H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}f(M)(H)=\mathrm{d}T(M)(H)\times M+M^{\intercal}\times\mathrm{d}\ \mathrm{id}(M)(H)=H^{\intercal}M+M^{\intercal}H$.

5 **Différentielle de l'inverse**

1. Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
2. Calculer, pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(I_n-H)(I_n+H)$.
3. En déduire que $f: M\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})\mapsto M^{-1}$ est différentiable en I_n et déterminer l'application $\mathrm{d}f(I_n)$.
4. Montrer que f est différentiable sur $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en toute $M\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$.

6 **Écrit CCINP** Dans cet exercice, $\|\cdot\|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. c'est-à-dire une norme vérifiant. pour tout couple (A,B) de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\times B\|\leqslant\|A\|\times\|B\|$.

1. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k$ converge. On notera e^A sa somme.
2. Démontrer que l'application $A\mapsto\mathrm{e}^A$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Si $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r>0$, déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k$ lorsque H tend vers O_n.
   En déduire que l'application $A\mapsto\mathrm{e}^A$ est différentiable en la matrice O_n.
   On précisera sa différentielle en O_n.

Solution de 6 : Écrit CCINP

1. Par récurrence on a $\left\|A^k\right\|\leqslant\|A\|^k$ pour tout $k\geqslant 0$.
   La convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{\|A\|^k}{k!}$ entraîne la converge absolue de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie , ce qui prouve la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k$.
2. Soit $f_k: A\mapsto\dfrac{1}{k!}A^k$ et $r>0$, on a $\left\|f_k(A)\right\|\leqslant\dfrac{\|A\|^k}{k!}\leqslant\dfrac{r^k}{k!}$, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}f_k$ converge normalement et uniformément sur la boule $B(0,r)$.
   Continuité de f_k :
   L'application $\varphi:(A_1,A_2,\ldots,A_k)\mapsto A_1\times A_2\times\ldots\times A_k$ est continue, car elle est k-linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^k$ vers $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application $\psi: A\mapsto(A,A,\ldots,A)$ est linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^k$ donc elle est continue .
   Ainsi $f_k=\dfrac{1}{k!}\varphi o\psi$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Le théorème de continuité des séries de fonctions donne , $A\mapsto\mathrm{e}^A$ est continue sur $B(0,r)$ pour tout $r>0$ donc elle est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
3. Soit $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle telle que $\|H\|\leqslant r$.
   Par continuité de la norme on a
   $$\begin{aligned}\frac{1}{\|H\|}\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right\| &\leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^{k-1}}{k!}\\ &\leqslant \|H\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{r^{k-2}}{k!}\end{aligned}$$
   donc $\displaystyle\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\underset{H\to 0}{\longrightarrow}0$, qui s'écrit $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k=o(\|H\|)$.
   Examinons la différence $\mathrm{e}^{H+0}-\mathrm{e}^0$, qui vaut
   $$\mathrm{e}^H-I_n=H+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k=H+o(\|H\|)$$
   donc l'application $A\mapsto\mathrm{e}^A$ est différentiable en la matrice 0 et sa différentielle est l'application identité.

7 **Oral Mines** Dans un espace euclidien E, montrer que l'application $x\mapsto\dfrac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable en tout point de $E\setminus\{0_E\}$ et calculer sa différentielle.

[*On utilisera deux méthodes : calcul direct de la différentielle (retour à la définition), et calcul des dérivées partielles, relatives à une base qu'on a évidemment intérêt à choisir orthonormale*]

Solution de 7 : Oral Mines

Soit $x \neq 0_E$. Au voisinage de 0_E (pour h), on a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\|x+h\|^2}(x+h) &= \frac{1}{\|x\|^2+2(x|h)+\|h\|^2}(x+h)\\
&= \left[\frac{1}{\|x\|^2}\times\frac{1}{1+2\dfrac{(x|h)}{\|x\|^2}+\dfrac{\|h\|^2}{\|x\|^2}}\right](x+h)\\
&= \left[\frac{1}{\|x\|^2}\times\left(1-2\frac{(x|h)}{\|x\|^2}+\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)\right)\right](x+h) \qquad (DL_0 \text{ de } u\mapsto 1/(1+u))\\
&= \frac{1}{\|x\|^2}x+\frac{1}{\|x\|^2}h-2\frac{(x|h)}{\|x\|^4}x+\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)
\end{aligned}
$$

ce qui conclut...bien sûr, à l'oral, on peut avoir des questions sur la justification plus détaillée des o, mais ce n'est pas spécialement difficile.

Avec les dérivées partielles, c'est plus simple. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E, notons $\frac{\partial}{\partial x_i}$ les dérivations partielles associées. Comme

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)=\frac{1}{x_1^2+\dots+x_n^2}\sum_{i=1}^n x_i e_i$$

on trouve facilement, si $x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{-2x_i}{\|x\|^4}x+\frac{1}{x_1^2+\dots+x_n^2}e_i$$

(dérivation par bilinéarité), d'où, toutes les dérivées partielles étant de classe C^1, la différentiabilité en tout point, avec une différentielle :

$$df(x): h\longmapsto \sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

si $h=\sum h_i e_i$. On retrouve bien le même résultat.

8 Différentielle du déterminant

La classe $\mathscr{C}^1$ de l'application $\det : A \longmapsto \det A$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne fait guère de doute : c'est une application polynomiale en les coefficients de A. Mais le calcul de sa différentielle est plein d'intérêt.

Dans la suite, on notera $\dfrac{\partial}{\partial a_{i,j}}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ les dérivations partielles relatives à la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer, pour toute matrice A, la dérivée partielle $\dfrac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A)$ à l'aide d'un coefficient de la comatrice $\mathrm{Com}\,A$ de A.
   ⚠ *Il s'agit d'une question facile !*
2. En déduire l'expression, si $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de $\mathrm{d}(\det)(A)(H)$.
   (*On utilisera encore la comatrice, et on fera par exemple intervenir la trace*).
3. **Applications**
   (a) On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot|\cdot)$. Déterminer pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le gradient du déterminant en A, c'est-à-dire l'unique matrice $\nabla\det(A)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

   $$\forall H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H)=(\nabla\det(A)\mid H).$$

   (b) (*Souvenirs d'algèbre linéaire...*) Trouver une condition nécessaire et suffisant sur A pour que $\mathrm{d}(\det)(A)=0$ (on désigne ici par simplement par 0 l'application $H\to 0$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$).

Solution de 8 : Différentielle du déterminant

1. Pourquoi « facile » ? parce que l'application $\det$ est affine quand on la considère comme fonction d'un coefficient de la matrice. Autrement dit, il va s'agir de dériver une fonction $t\mapsto at+b$. Comme souvent avec les fonctions de plusieurs variables, le fond du problème n'est pas compliqué, mais il faut démêler les notations. Disons donc, si (i,j) est un couple fixé :

   $$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det A=a_{i,j}\,[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}+\phi_{i,j}(A)$$

   où ni $[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$, ni $\phi_{i,j}(A)$ ne dépend de $a_{i,j}$. Ceci est conséquence par exemple de la formule sur le développement du déterminant par rapport à une ligne, ou par rapport à une colonne. On l'écrit naturellement si on a compris ce que signifiait le mot « cofacteur ». Et on a donc

   $$\frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A)=[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$$

2. Les $A\longmapsto[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$ sont continues sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc on peut appliquer le théorème fondamental (on pouvait aussi dire qu'on avait admis comme évident le fait que $\det$ était de classe C^1) :

   $$\forall H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}H_{i,j}\,[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$$

   Qu'on peut réécrire en

   $$\forall H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n H_{i,j}\,[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}\right)$$

   Et on arrive ainsi à une formule célèbre :

   $$\forall H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H)=\mathrm{tr}\big(H\ (\mathrm{Com}\,A)^T\big)$$

   (les propriétés de la trace font qu'on peut arranger le produit comme on veut, mettre la transposition sur n'importe laquelle des deux matrices...-
3. **Applications**
   (a) Par ce qui précède, $\nabla\det(A)=\mathrm{Com}\,A$.
   (b) Une condition nécessaire est que la comatrice de A soit nulle, c'est-à-dire que tous les déterminants des matrices carrées $(n-1)\times(n-1)$ extraites de A soient nuls, c'est-à-dire que le rang de A soit $\leqslant n-2$ (caractérisation du rang par la dimension maximale d'une matrice carrée inversible extraite).

9 Optimisation et convexité

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f:\mathscr{U}\mapsto\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable).

1. Montrer que si $a,b\in\mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a)(b-a)\leqslant f(b)-f(a)$.
2. Montrer que tout point critique est un minimum global.
3. Montrer que les points critiques forment un ensemble convexe fermé.

10 Inégalité des accroissements finis

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de E $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f:\mathscr{U}\mapsto E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

On suppose qu'il existe un réel $C\geqslant 0$ tel que pour tout $x\in\mathscr{U}$, $|||\mathrm{d}f(x)|||\leqslant C$, $|||\cdot|||$ désignant la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur E.

Montrer en utilisant une intégrale que

$$\forall a,b\in\mathscr{U},\ \big\|f(b)-f(a)\big\|\leqslant C\,\|b-a\|$$

Espace tangent

11 Déterminer une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = xy + xz + 2x + 2y$ au point $(0,0,0)$.

Solution de 11 :
$g : (x,y,z) \mapsto xy + xz + 2x + 2y - z$ est différentiable en $(0,0,0)$ et $\mathrm{d}g(0,0,0)(x,y,z) = 2x + 2y - z$ car $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) = 2$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) = -1$.

L'équation du plan tangent est donc $2x + 2y - z = 0$.

12 Déterminer une équation du plan tangent à la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (hyperboloïde à une nappe) en un point régulier.

Solution de 12 :
$g : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - 1$ est différentiable et $\mathrm{d}g(x_0, y_0, z_0) : (x,y,z) \mapsto 2x_0x + 2y_0y - 2z_0z$ n'est pas l'application nulle si et seulement si $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$.

L'équation du plan tangent est alors $2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) - 2z_0(z-z_0) = 0$ soit encore $2x_0x + 2y_0y - 2z_0z = 1$.

13 Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathscr{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$ en I_n puis $M \in \mathscr{SL}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathscr{O}(n)$ en I_n puis $M \in \mathscr{O}(n)$.

Solution de 13 :

- $\mathscr{SL}_n(\mathbb{R})$

  Première méthode Une première méthode consiste à considérer une équation implicite

$$g(M) = \det M - 1 = 0$$

  avec g différentiable (car polynomiale) en toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En calculant les dérivées partielles grâce à une développement par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne, on arrive classiquement à l'expression de la différentielle du déterminant :

$$\mathrm{d}g(M)(H) = \mathrm{d}\det(M)(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}\, M)^{\intercal} H) = \left(\mathrm{Com}\, M \middle| H\right)$$

  pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\nabla g(M) = \mathrm{Com}\, M$.
  En $I_n \in \mathscr{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}g(I_n) = \mathrm{tr} \neq 0$ et le cours nous dit que

$$\mathrm{T}_{I_n}\mathscr{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{d}g(I_n)\right) = \{H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}\, H = 0\}.$$

  En $M \in \mathscr{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}g(M)(\mathrm{Com}\, M) = \|\mathrm{Com}\, M\|^2 \neq 0$ car M inversible donc $\mathrm{Com}\, M$ l'est aussi d'après la formule de la comatrice, elle est donc non nulle. Ainsi, $\mathrm{d}g(M)$ n'est pas l'application nulle et le cours nous dit que

$$\mathrm{T}_M\mathscr{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{d}g(M)\right) = \nabla g(M)^{\perp} = (\mathrm{Com}\, M)^{\perp} = \{H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}((\mathrm{Com}\, M)^{\intercal} H)\}.$$

  Deuxième méthode On peut aussi utiliser la définition de vecteur tangent.

- $\mathscr{O}(n)$