

## Exercices traités en cours

- 1** Montrer que  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \rightarrow M^2 \end{cases}$  est différentiable en toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et calculer  $df(A)$ .
- 2** Montrer que, si  $E$  est un espace euclidien  $f : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \|x\|^2 \end{cases}$  est différentiable en toute  $a \in E$  et calculer  $df(a)$ .
- 3** Montrer que, si  $E$  est un espace euclidien,  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $f : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow (x|u(x)) \end{cases}$  est différentiable en toute  $a \in E$  et calculer  $df(a)$ . Que se passe-t-il si, de plus,  $u$  est symétrique ?

## Différentielle

- Pour déterminer la différentielle d'une application (différentiable), on peut passer par la définition en formant un développement limité à l'ordre 1 et en reconnaissant une partie linéaire et une partie négligeable, passer par la dérivée selon un vecteur :  $df(a)(v) = D_v f(a) = \phi'(0)$  où  $\phi : t \mapsto f(a + tv)$  ou encore passer par les dérivées partielles.

- 4** Montrer que  $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T M$  est différentiable et calculer sa différentielle.

**5** Différentielle de l'inverse

1. Montrer que  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Calculer, pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $(I_n - H)(I_n + H)$ .
3. En déduire que  $f : M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$  est différentiable en  $I_n$  et déterminer l'application  $df(I_n)$ .
4. Montrer que  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  et calculer sa différentielle en toute  $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .

- 6** **Écrit CCINP** Dans cet exercice,  $\|\cdot\|$  désigne une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple  $(A, B)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|$ .

1. Démontrer que pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$  converge. On notera  $e^A$  sa somme.
2. Démontrer que l'application  $A \mapsto e^A$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Si  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon  $r > 0$ , déterminer la limite de  $\frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$  lorsque  $H$  tend vers  $0_n$ .  
En déduire que l'application  $A \mapsto e^A$  est différentiable en la matrice  $0_n$ .  
On précisera sa différentielle en  $0_n$ .

- 7** **Oral Mines** Dans un espace euclidien  $E$ , montrer que l'application  $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$  est différentiable en tout point de  $E \setminus \{0_E\}$  et calculer sa différentielle.

[On utilisera deux méthodes : calcul direct de la différentielle (retour à la définition), et calcul des dérivées partielles, relatives à une base qu'on a évidemment intérêt à choisir orthonormale]

- 8** **Différentielle du déterminant** La classe  $\mathcal{C}^1$  de l'application  $\det : A \mapsto \det A$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ne fait guère de doute : c'est une application polynomiale en les coefficients de  $A$ . Mais le calcul de sa différentielle est plein d'intérêt.

Dans la suite, on notera  $\frac{\partial}{\partial a_{i,j}}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) les dérivations partielles relatives à la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Exprimer, pour toute matrice  $A$ , la dérivée partielle  $\frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A)$  à l'aide d'un coefficient de la comatrice  $\text{Com}A$  de  $A$ .  
 $\triangle$  Il s'agit d'une question facile !
2. En déduire l'expression, si  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , de  $d(\det(A))(H)$ .  
(On utilisera encore la comatrice, et on fera par exemple intervenir la trace).
3. **Applications**

(a) On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire canonique, noté  $(\cdot | \cdot)$ . Déterminer pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , le gradient du déterminant en  $A$ , c'est-à-dire l'unique matrice  $\nabla \det(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d(\det(A))(H) = (\nabla \det(A) | H).$$

(b) (Souvenirs d'algèbre linéaire...) Trouver une condition nécessaire et suffisant sur  $A$  pour que  $d(\det(A)) = 0$  (on désigne ici par simplement par 0 l'application  $H \mapsto 0$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ ).

**9** Optimisation et convexité

Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable).

1. Montrer que si  $a, b \in \mathcal{U}$ ,  $df(a)(b-a) \leq f(b) - f(a)$ .
2. Montrer que tout point critique est un minimum global.
3. Montrer que les points critiques forment un ensemble convexe fermé.

**10** Inégalité des accroissements finis

Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert convexe de  $E$   $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et  $f : \mathcal{U} \rightarrow E$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On suppose qu'il existe un réel  $C \geq 0$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{U}$ ,  $\|df(x)\| \leq C$ ,  $\|\cdot\|$  désignant la norme subordonnée à la norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$ .

Montrer en utilisant une intégrale que

$$\forall a, b \in \mathcal{U}, \|f(b) - f(a)\| \leq C \|b - a\|$$

## Espace tangent

- Pour déterminer les vecteurs tangents ou l'hyperplan tangent à une surface, on utilise une équation implicite  $g(x) = 0_{\mathbb{R}}$  avec  $g$  différentiable.

On a des vecteurs tangents en  $a$  si le point  $a$  est régulier ie  $dg(a) \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$ , ce sont les vecteurs de  $\text{Ker}(dg(a))$  et l'hyperplan tangent est d'équation  $dg(a)(x-a) = 0$  ou encore, si on a une structure euclidienne,  $(\nabla g(a)|x-a) = 0$ .

- 11** Déterminer une équation du plan tangent à la surface d'équation  $z = xy + xz + 2x + 2y$  au point  $(0, 0, 0)$ .

- 12** Déterminer une équation du plan tangent à la surface d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  (hyperboloïde à une nappe) en un point régulier.

- 13** Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à  $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$  en  $I_n$  puis  $M \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$  et l'ensemble des vecteurs tangents à  $\mathcal{O}(n)$  en  $I_n$  puis  $M \in \mathcal{O}(n)$ .