

Exercices vus en cours

Solution de 3 : Trèèèèèèè classique

On est en dimension finie, il suffit de montrer que $\mathcal{O}(n)$ est fermée et bornée pour n'importe quelle norme.

Or $\mathcal{O}(n)$ est fermée comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto M^T M$ (bilinearité du produit matriciel et linéarité de la transposition) et bornée car, avec la norme euclidienne $\|M\|^2 = \text{tr}(M^T M)$, on a $\mathcal{O}(n) \subset \overline{B}(0, \sqrt{n})$.

Solution de 4 : Classique : décomposition QR

- Si $(c_1, \dots, c_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A , A est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique (pour lequel, donc, $\mathcal{B}_c$ est orthonormale). Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par le procédé de Gram-Schmidt. On a alors, avec des notations habituelles :

$$P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Mais $P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$, matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, est orthogonale. Et l'algorithme de Gram-Schmidt garantit que, pour tout k ,

$$c_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

où l'on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ (on a en effet, pour tout k ,

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(c_1, \dots, c_k) \quad)$$

et donc...ça marche.

- À quelle condition a-t-on

$$QR = Q_0 R_0$$

où Q et Q_0 sont orthogonales, R et R_0 triangulaires supérieures inversibles ?

On remarque que l'égalité étudiée équivaut à

$$Q_0^{-1} Q = R_0 R^{-1}$$

où le premier membre est une matrice orthogonale, le second une matrice triangulaire supérieure. Le problème est donc : quelles sont les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures ? construisons une telle matrice : son premier vecteur colonne, unitaire et dont seule la première composante est possiblement non nulle, est donc $(\pm 1, 0, \dots, 0)$. Son deuxième vecteur colonne est orthogonal au premier, sa première composante est donc nulle. Donc seule sa deuxième composante est non nulle, et vaut nécessairement ± 1 car il est unitaire. Ainsi de suite...Bref,

$$\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) = \{D_\epsilon ; \epsilon \in \{-1, 1\}^n\}$$

où, si $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, $D_\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. On conclut que

$$QR = Q_0 R_0 \Leftrightarrow \exists \epsilon \in \{-1, 1\}^n \quad R = D_\epsilon R_0 \text{ et } Q = Q_0 D_\epsilon$$

(on s'est servi du fait que D_ϵ était sa propre inverse). Grosso modo, cela signifie que dans deux décompositions QR , au signe près on retrouve les mêmes coefficients.

Solution de 6 :

$a = (1, 1, 1)$ dirige l'axe de la rotation.

Son orthogonal est $P : x + y + z = 0$ dirigé par $b = (1, 0, -1)$ et $c = (1, -2, 1)$, ils sont orthogonaux.

D'où une base orthonormale adaptée de $\mathbb{R}^3$: $(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a)$.

Dans cette base, la matrice de la rotation est $M = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice recherchée est alors PMP^T où $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est la matrice de passage

de la base canonique à $(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a)$.

La matrice recherchée est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution de 7 :

$$(C_1|C_2) = \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 - \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 = 0.$$

$$(C_2|C_3) = -\sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 + \sqrt{3}/3\sqrt{6}/3 - \sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 = 0.$$

$$(C_1|C_3) = -\sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 + \sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 = 0.$$

$$\|C_1\|^2 = (\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2 + 1/2 = 1.$$

$$\|C_2\|^2 = (\sqrt{3}/3)^2 + (\sqrt{3}/3)^2 + (\sqrt{3}/3)^2 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1.$$

$$\|C_3\|^2 = (\sqrt{6}/6)^2 + (\sqrt{6}/6)^2 + (\sqrt{6}/6)^2 = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1.$$

Donc $M \in \mathcal{O}(3)$.

Solution de 8 :

Les colonnes sont orthonormées $C_1 \wedge C_2 = +C_3$ avec la première coordonnée : c'est une matrice de rotation.

On calcule les vecteurs invariants, on trouve $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $a = (1, 0, -4)$ dirige et oriente l'axe de la rotation.

Puis $\text{tr } M = -7/9 = 2 \cos \theta + 1$ donc $\cos \theta = -8/9$.

Et le signe de $\sin \theta$ est celui de $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} < 0$.

Donc rotation d'angle $-\text{Arccos}(-8/9)$.

Solution de 12 : [Très Classique!] Racines carrées et décomposition polaire

1. **Racine carrée** : Par théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ (i.e. diagonale) telles que

$$A = PDP^T = PDP^{-1}$$

Et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de D , donc de A . Donc les λ_i sont positifs, et, en posant $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = PD'P^{-1} = PD'P^T$, on obtient une matrice symétrique (deuxième forme) et à valeurs propres positives (première forme) telle que $B^2 = A$. Si A est définie positive, elle est dans $GL_n(\mathbb{R})$ (elle n'a pas 0 pour valeur propre), donc B aussi (prendre le déterminant, ou encore dire que $A^{-1}BB = I_n$), donc B , étant déjà positive, est définie positive.

2. (a) Conséquence de la question 1. On peut aussi par le théorème spectral, se donner $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthodiagonalisante de u avec pour tout i , $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et poser h l'unique endomorphisme tel que pour tout i , $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. Vu la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$, il convient.

(b) u est un polynôme en h , donc commute avec. Comme dans le classique de la diagonalisation simultanée, on considère $E_\lambda(u)$ un sous-espace propre de u , stable par h , qui induit dessus un endomorphisme h_λ autoadjoint donc diagonalisable.

Mais comme h_λ est positif et $h_\lambda^2 = u_\lambda = \lambda \text{id}_{E_\lambda(u)}$, nécessairement $h_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{id}_{E_\lambda(u)}$ (se voit facilement par représentation matricielle). Autre argument possible : si μ valeur propre de h_λ , $\mu^2 = \lambda$ et $\mu \geq 0$ donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Et comme h_λ est diagonalisable avec une seule valeur propre, on a bien $h_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{id}_{E_\lambda(u)}$.

Comme $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp } u} E_\lambda(u)$ (car u est diagonalisable), h est bien unique.

3. $M = D'P^T$ où D' comme ci-dessus convient.

4. **Décomposition polaire** : Une analyse permet de voir que si on a une telle décomposition $A = QS$, alors $A^T = S^T Q^T = S Q^{-1}$ donc $A^T A = S^2$.

Or $A^T A$ est assez facilement une matrice symétrique. Et, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^T(A^T A)X = Y^T Y \quad \text{où } Y = AX$$

Or, si $X \neq (0)$, $Y = AX \neq (0)$ car A est inversible, donc $Y^T Y = \|Y\|^2 > 0$.

En utilisant les questions précédentes, il existe S symétrique définie positive telle que

$$S^2 = A^T A$$

Posons $Q = AS^{-1}$; on calcule

$$Q^T Q = (S^{-1})^T A^T A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

Donc Q est orthogonale.

L'unicité repose, d'après la remarque initiale, sur le fait qu'une matrice symétrie définie-positive a une unique racine carrée définie positive.

5. On a $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}$ avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ fermé en tant que sous-espace de dimension finie et $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0\} = \bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f_X^{-1}([0, +\infty[)$ où pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$f_X : M \mapsto X^T M X$ est continue car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $f_X^{-1}([0, +\infty[)$ est fermée, donc $\mathcal{P}$ l'est donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'est.

On peut aussi prendre une suite $(M_n)_n$ convergente vers M de matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et, par continuité de la transposition et des f_X , passer à la limite dans $M_n^T = M_n$ et $X^T M_n X \geq 0$ pour en déduire que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par densité, on a une suite (A_n) de matrices inversibles telles que $A_n \rightarrow A$. On peut donc trouver des suites (Q_n) et (S_n) de matrices respectivement orthogonales et symétriques telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = Q_n S_n$.

Par compacité de $\mathcal{O}(n)$, on a une extractrice φ telle que $Q_{\varphi(n)} \rightarrow Q \in \mathcal{O}(n)$.

Alors $S_{\varphi(n)} = Q_{\varphi(n)}^{-1} A_{\varphi(n)} \rightarrow S = Q^{-1} A$ (la continuité de $M \mapsto M^{-1}$ vient de la formule de la comatrice) et comme $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé, $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Finalement, $A = QS$ avec $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Solution de 13 : Formules variationnelles ; norme subordonnée et rayon spectral

1. Pour $x = 0_E$, c'est facile.

Sinon, par inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $y \in S(0_E, 1)$, $(x|y) \leq |(x|y)| \leq \|x\| \|y\| = \|x\|$.

De plus, ce majorant est atteint pour $y = \frac{1}{\|x\|} x \in S(0_E, 1)$.

$$\text{Donc } \|x\| = \max_{\|y\|=1} (x|y) = \sup_{\|y\|=1} (x|y).$$

Remarque : la fonction $y \mapsto (x|y)$ est continue (linéaire sur E de dimension finie) et $S(0_E, 1)$ est compacte (fermé borné en dimension finie) donc elle atteint un maximum sur $S(0_E, 1)$.

Pour la deuxième expression, il suffit de travailler de même avec le compact $\overline{B}(0_E, 1)$ (ou dans la preuve directe, de voir que $\frac{1}{\|x\|}x \in \overline{B}(0_E, 1)$.)

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|u^* \circ u(x)) \leq \|u^* \circ u(x)\| \|x\| \leq \|u^* \circ u\| \|x\|^2 \leq \|u^*\| \cdot \|u\| \|x\|^2$$

car $\| \cdot \|$ est une norme d'algèbre. Donc $\|u\|^2 \leq \|u^*\| \cdot \|u\|$.

Alors soit $\|u\| = 0$ et alors $u = 0_{\mathcal{L}(E)} = u^*$ et donc $\|u\| = 0 = \|u^*\|$, soit $\|u\| \neq 0$ et alors $\|u\| \leq \|u^*\|$. Puis, symétriquement, $\|u^*\| \leq \|(u^*)^*\| = \|u\|$.

3. Par théorème spectral, on a une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivement.

$$\text{Si } x = \sum_{k=1}^n x_k e_k,$$

$$(x|u(x)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \in [\min(\text{Sp } u) \|x\|^2, \max(\text{Sp } u) \|x\|^2],$$

les bornes étant atteinte pour des vecteurs e_i d'indice correspondant respectivement à la plus petite et à la plus grande valeur propre.

Pour montrer la version matricielle directement, on écrit le théorème spectral : $S = P D P^T$ avec $P \in \mathcal{O}(n)$ et D diagonale et on obtient, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en posant $Y = P^T X$ ie $X = P Y$,

$$\frac{X^T S X}{X^T X} = \frac{X^T P D P^T X}{X^T X} = \frac{Y^T D Y}{Y^T P^T P Y} = \frac{Y^T D Y}{Y^T Y} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

avec des notations évidentes et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ce qui permet de conclure comme dans la version géométrique.

4. On suppose $u \in \mathcal{S}(E)$. Comme dans la preuve précédente, pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2 \leq (\rho(u))^2 \|x\|^2$$

atteint pour x vecteur propre associé à une valeur propre de valeur absolue égale à $\rho(u)$.

Donc $\|u\| = |\rho(u)| = \rho(u) \geq 0$.

5. On a déjà $u^* \circ u \in \mathcal{S}(E)$.

D'après la propriété précédente, $\rho(u^* \circ u) = \|u^* \circ u\| \leq \|u^*\| \times \|u\| = \|u\|^2$.

Puis, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|u^* \circ u(x)) \leq \|x\| \cdot \|u^* \circ u(x)\| \leq \|u^* \circ u\| \cdot \|x\|^2$ par inégalité de Cauchy-Schwarz et définition de la norme subordonnée.

Finalement, $\|u\|^2 \leq \|u^* \circ u\|$.

Adjoint, transposée

Solution de 14 :

1. $\varphi^* : M \mapsto A^T M$.
2. A symétrique puis A orthogonale.

Solution de 15 :

On a $\text{Ker } A \subset \text{Ker}(A^T A)$ directement et si $X \in \text{Ker}(A^T A)$, $\|AX\|^2 = X^T A^T A X = 0$ donc $X \in \text{Ker } A$.
Il suffit ensuite d'utiliser la formule du rang.

Solution de 16 :

ddmaths

Solution de 17 : CCINP

ddmaths

Solution de 18 :

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Matrices orthogonales

Solution de 21 :

1. Soit a le vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$ contenant les $|a_{i,j}|$. Alors, par Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = (a|u) \leq \|a\| \times \|u\| = n \times \sqrt{n}$$

car les colonnes de A sont normées.

2. Savoir que AU est une matrice colonne dont les coefficients sont les sommes des coefficients de chaque ligne de A aide à trouver

$$U^T A U = \sum_{i,j} a_{i,j}$$

Mais considérons le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on peut alors interpréter

$${}^T U A U = \langle U, AU \rangle$$

Et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle U, AU \rangle| \leq \|U\| \|AU\|$$

Mais A , orthogonale, conserve la norme euclidienne. Comme $\|U\| = \sqrt{n}$, l'inégalité est démontrée (assez facile avec l'indication, mais sans ladite indication ce le serait nettement moins). L'égalité dans Cauchy-Schwarz a lieu si et seulement si AU et U sont liés, soit si et seulement si $AU = \pm U$ (A conserve la norme). Soit si et seulement si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 (respectivement -1).

Solution de 22 :

Les colonnes des matrices de $\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ contiennent chacune un seul coefficient non nul, valant ± 1 , jamais sur la même ligne (car lesdites colonnes sont orthonormées).

On part de I_n , on permute les colonnes, et on a deux choix par colonne pour le coefficient non nul : 1 ou -1 .

Ainsi, $|\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})| = 2^n n!$.

En examinant les colonnes dans l'ordre, on trouve que $\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) = \{\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}\}$.

Une matrice antisymétrique étant de déterminant nul en dimension impaire, $\mathcal{O}(3) \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Et on trouve $\mathcal{O}(2) \cap \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Solution de 23 : Mines MP

1. $M \in \mathcal{O}(3) \iff \sigma = 0$ et $S \in \{-1, 1\}$.

2. $M \in \mathcal{SO}(3) \iff \sigma = 0$ et $S = 1$.

3. Étudier la fonction.

Solution de 24 :

ddmaths

Solution de 26 :

Le sens direct est connu.

Pour le sens indirect, si $\chi_A = \chi_B$, on s'intéresse à la forme réduite de A , diagonale par blocs, avec sur la diagonale des 1, des -1 et des R_θ .

Cela donne dans χ_A des facteurs $X - 1$, $X + 1$ et $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

L'égalité des polynômes caractéristiques assure que A et B ont même forme réduite (à l'ordre des blocs diagonaux près), donc, par transitivité, sont semblables.

Solution de 27 : Les réflexions engendrent $\mathcal{O}(n)$

1. Calcul facile :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

Toute matrice R de $SO(2)$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

et donc peut s'écrire $M(\alpha)M(\alpha - \phi)$ pour tout α , ou $M(\phi + \beta)M(\beta)$ pour tout β . Or les $M(\alpha)$ sont bien des matrices de réflexion (polynôme caractéristique : $X^2 - 1$, elles sont donc diagonalisables avec pour valeurs propres -1 et 1 , chacune avec un sous-espace propre qui est une droite vectorielle).

2. Une propriété vraie en dimension 2 mais pas en dimension ≥ 3 est que les isométries vectorielles sont soit des rotations soit des réflexions. Autre manière de dire la même chose : les éléments de $\mathcal{O}(2)$ qui ont pour déterminant -1 sont des réflexions. Donc si M et R ont pour déterminants respectifs -1 et 1 , MR a pour déterminant -1 et est donc...une réflexion (insistons encore sur le fait que ce raisonnement simple n'est valable qu'en dimension 2). Mais $M^2 = I_2$ (valable pour toute symétrie, a fortiori orthogonale, a fortiori pour toute réflexion). Donc, si on note $M' = MR$, en multipliant par M' à droite on aura $R = MM'$.

3. On ne va pas faire une récurrence, mais un produit par blocs. En effet, notant $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, le théorème de réduction dit que pour toute matrice $A \in \mathcal{O}(n)$ il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\alpha_s} & \\ & & & I_t \end{pmatrix} P^T$$

(si $A \in \mathcal{SO}(n)$) ou telle que

$$A = P \begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\alpha_s} & \\ & & & -1 & \\ & & & & I_t \end{pmatrix} P^T$$

(si $A \in \mathcal{SO}(n)$). Rappelons que pour obtenir une écriture de ce type, on met les éventuels -1 du théorème de réduction dans des matrices R_π , jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'au plus un. Il n'y a en revanche pas tellement d'intérêt à mettre les 1 dans des matrices R_0 . Traitons le premier cas : on peut écrire

$$A = A_1 \dots A_s$$

$$\text{avec } A_1 = P \begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & \\ & I_{n-2} \end{pmatrix} P^T, A_2 = P \begin{pmatrix} I_2 & \\ & R_{\alpha_2} & \\ & & I_{n-4} \end{pmatrix} P^T, \text{ etc...}$$

Le cas $n = 2$ donne l'existence de deux matrices M_1 et M_2 de réflexions (des matrices 2×2) telles que

$$R_{\alpha_1} = M_1 M_2$$

Mais alors

$$A_1 = \widetilde{M}_1 \widetilde{M}_2$$

avec $\widetilde{M}_1 = P \begin{pmatrix} M_1 & \\ & I_{n-2} \end{pmatrix} P^T$, $\widetilde{M}_2$ de même. Les matrices $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ sont des matrices de réflexions (matrices orthogonales, avec 1 pour valeur propre et un sous-espace propre de dimension $n-1$, -1 valeur propre simple). On fait de même avec les autres A_k et on en déduit le résultat. Le deuxième cas se traite de même, avec une matrice en plus contenant le -1 sur la diagonale...

Isométries

Solution de 29 :

$1 \Rightarrow 2$: f symétrie orthogonale par rapport à F . Si $x, y \in E$,

$$(f(x)|y) = (p_F(x) - p_{F^\perp}(x) | p_F(y) + p_{F^\perp}(y)) = (p_F(x) | p_F(y)) - (p_{F^\perp}(x) | p_{F^\perp}(y)) = (p_F(x) + p_{F^\perp}(x) | p_F(y) - p_{F^\perp}(y)) = (x | f(y))$$

Donc $f \in \mathcal{S}(E)$.

De même, on montre que f conserve la norme donc $f \in \mathcal{O}(E)$.

$2 \Rightarrow 3$: $f^{-1} = f^* = f$ donc f est une symétrie.

$$3 \Rightarrow 4 : f = f^{-1} = f^*.$$

4 $\Rightarrow$ 1 : f symétrie par rapport à F parallèlement à G , symétrique. Si $x \in F$ et $y \in G$,

$$(x|y) = (s(x)|s(y)) = (x|-y) = -(x|y)$$

donc $(x|y) = 0$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est la matrice en base d'une symétrie orthogonale.
2. $A \in \mathcal{O}(n) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. $A^2 = I_n$ et $A \in \mathcal{O}(n)$
4. $A^2 = I_n$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Solution de 30 : Linéarité automatique

1. Si u conserve le produit scalaire (donc la norme) :

$$\begin{aligned} \|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 &= \|u(x + \lambda y)\|^2 + \|u(x)\|^2 + \lambda^2 \|u(y)\|^2 - 2(u(x + \lambda y)|u(x)) \\ &\quad - 2\lambda(u(x + \lambda y)|u(y)) + 2\lambda(u(x)|u(y)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Si u conserve les distances et $u(0_E) = 0_E$, comme

$$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2} (\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2),$$

u conserve le produit scalaire.

3. Si u conserve les distances et $a = u(0_E)$, on peut appliquer la question précédente à $v = u - a$.
4. Facile.

Solution de 38 :

1. Considérons $x \in \ker v$, $y \in \operatorname{im} v$. Il existe z tel que $y = v(z)$. Et

$$(x|y) = (x|v(z)) = (x|z) - (x|u(z))$$

Mais $x = u(x)$, donc $(x|u(z)) = (u(x)|u(z))$ et u conserve le produit scalaire ; on conclut bien que

$$(x|y) = 0$$

Il en ressort que $\ker v \perp \operatorname{im} v$. Donc $\ker v \subset (\operatorname{im} v)^\perp$. L'égalité résulte alors de l'égalité des dimensions, elle-même conséquence du théorème du rang.

2. Soit $x \in E$, on peut écrire $x = y + z$ où $y \in \operatorname{Ker} v$, c'est-à-dire $y = u(y)$, et $z \in (\operatorname{Ker} v)^\perp = \operatorname{im}(v)$, ce qui signifie qu'il existe $t \in E$ tel que $z = v(t) = t - u(t)$. On a alors

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z)$$

Mais pour tout k on a $u^k(y) = y$ (récurrence sur k), et $u^k(z) = u^k(t) - u^{k+1}(t)$ ce qui fait que la deuxième somme est télescopique. Donc

$$p_n(x) = y + \frac{1}{n} (t - u^n(t))$$

Mais par orthogonalité de u , on a $\|u^n(t)\| = \|t\|$, donc

$$p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$$

ce qui conclut.

Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques

Solution de 40 :

Si A est solution, A est diagonalisable par théorème spectral, et ses valeurs propres, toutes réelles, vérifient $\lambda^4 + \lambda^2 = 0$ donc $\lambda = 0$.

Seule la matrice nulle est solution.

Solution de 41 :

1. Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'expression de $[AB]_{i,j}^2$:

$$[AB]_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2$$

donc

$$\|AB\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} [AB]_{i,j}^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right).$$

On reconnaît une somme double produit.

$$\|AB\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} [AB]_{i,j}^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \times \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) = \|A\|^2 \times \|B\|^2.$$

2. Par théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$. Mais alors

$$\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^T A) = \operatorname{tr}(PDP^T PDP^T) = \operatorname{tr}(D^2)$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées autant que de fois que leur multiplicité. Alors

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$

3.

$$\|Q\|^2 = \operatorname{tr}(Q^T Q) = \operatorname{tr}(I_n) = n$$

Donc $\|Q\| = \sqrt{n}$. On retrouve que $\mathcal{O}(n)$ est borné. Même mieux, pour cette norme, $\mathcal{O}(n)$ est inclus dans une sphère.

Solution de 42 :

On a $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_n$ et $(AA^T)^p = A^p \times (A^p)^T = 0_n$ car A et A^T commutent.

Donc $A^T A$ est une matrice nilpotente, diagonalisable car symétrique réelle. Donc $A^T A = 0_n$ (son spectre est réduit à $\{0\}$).

Puis $\|A\|_2^2 = \operatorname{tr}(A^T A) = 0$ donc $A = 0_n$.

Autre argument possible : pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A = X^T A^T A X = \|AX\|^2$ donc $\operatorname{Im} A = \{0\}$ donc $A = 0_n$.

Solution de 43 :

On utilise le théorème spectral et on obtient que $\exp A$ est diagonalisable avec comme valeurs propres les exponentielles de celles de A qui sont toutes strictement positives.

Solution de 44 :

Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in [0, 1]$.

Alors $(1-t)A + tB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et si $X \neq 0$,

$$X^T[(1-t)A + tB]X = (1-t)X^TAX + tX^TBX > 0$$

car $1-t$ et t ne sont pas simultanément nuls.

Solution de 45 : Écrits CCINP 2025

1. Une première solution consiste à utiliser le théorème spectral et la comparaison classique entre moyennes géométrique et arithmétique.

On peut aussi, avec l'indication, dans le cas où 0 n'est pas valeur propre de S , noter $x_1, \dots, x_n$ les valeurs propres (strictement positives) comptées avec multiplicité. Par concavité du $\ln$, sa courbe est au dessous de sa tangente en 1 donc si $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. Cela permet d'écrire, comme dans l'indication, $\ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \frac{x_k}{m} - 1$.

En sommant pour $1 \leq k \leq n$, on obtient $\ln\left(\frac{\det S}{m^n}\right) \leq 0$, donc $\det S \leq m^n$, ce qui correspond à l'inégalité voulue.

Le cas d'égalité correspondant à des égalités dans toutes les inégalités $\ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \frac{x_k}{m} - 1$, ce qui se produit si et seulement si $\frac{x_k}{m} = 1$, seul point d'intersection entre $\ln$ et sa tangente en 1. Cela correspond exactement à $S \in \text{Vect } I_n$.

Dans le cas où 0 est valeur propre, il y a égalité si et seulement si $\text{tr } S = 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres (positives) sont nulles si et seulement si $S = 0_n$ et on a bien $0_n \in \text{Vect } I_n$. Pour le cas d'égalité, remarquer qu'alors, si les x_k sont les valeurs propres de S , les $\ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \frac{x_k}{m} - 1$ sont des égalités.

2. Appliquer 1. à S .
3. Appliquer 1. à $A^T A$.

Solution de 46 : Mines

On a, si f est convexe sur un intervalle I , et si $x_1, \dots, x_n \in I$,

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

La fonction $\ln$ étant croissante, l'inégalité proposée équivaut à

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda_i) \geq \ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i\right)\right)$$

...du moins si les λ_i sont strictement positifs. Mais si l'un des λ_i est nul, l'inégalité que l'on cherche est simple, on peut donc les supposer tous strictement positifs. L'inégalité proposée est donc équivalente à :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(\ln \lambda_i)) \geq \ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i\right)\right)$$

Et si on montre que l'application $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe, on conclut (en appliquant l'inégalité générale de convexité aux $\ln \lambda_i$). Or cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x} = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$$

qui croît manifestement (on peut aussi calculer la dérivée seconde).

Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on écrit $A = PDP^{-1} = PDP^T$ où $P \in \mathcal{O}(n)$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et $\forall i \quad \lambda_i \geq 0$. Donc $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et

$$\det(I_n + A) = \det(P(I_n + D)P^{-1}) = \det(I_n + D) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i).$$

On est donc ramené à l'inégalité du début.

Si A et B sont symétriques positives, $A + B$ l'est (classique, utiliser la définition et non la caractérisation par le spectre). Si les deux matrices sont positives non définies, leurs déterminants sont nuls, le membre de droite de l'inégalité souhaitée vaut 0, le membre de gauche est positif (une matrice symétrique positive a un spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$, et est diagonalisable, donc a un déterminant positif). On peut donc supposer $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. Il est classique, à partir de la diagonalisation de A avec matrice de passage orthogonale, de trouver $A^{1/2}$ symétrique définie positive telle que

$$(A^{1/2})^2 = A$$

On notera $(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$, on a donc

$$A + B = A^{1/2}(I_n + A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

Or, si $C = A^{-1/2}BA^{-1/2}$, on vérifie que C est symétrique (B et $A^{-1/2}$ le sont, et le produit est palindromique). De plus, si X est une colonne non nulle,

$$X^T C X = Y^T B Y \quad \text{avec} \quad Y = A^{-1/2} X \neq (0)$$

donc $X^T C X > 0$. On conclut que C est symétrique définie positive (symétrique positive suffisait). Et donc on est ramené à ce qui précède :

$$\begin{aligned} [\det(A + B)]^{1/n} &= [\det(A^{1/2}(I_n + A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2})]^{1/n} \\ &= [(\det(A^{1/2}))^2]^{1/n} [\det(I_n + A^{-1/2}BA^{-1/2})]^{1/n} \\ &\geq (\det A)^{1/n} \left(1 + [\det(A^{-1/2}BA^{-1/2})]^{1/n} \right) \end{aligned}$$

Mais $\det(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = \frac{\det B}{\det A}$, on conclut...