

Exercices vus en cours

Solution de 6 :

On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0, 1, 1)$.

Puis on cherche $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda \varepsilon_1$ avec λ tel que $(\varepsilon_1 | \varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1 | e_2) + \lambda(\varepsilon_1 | \varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

En cherchant $\varepsilon_3 = e_3 + \mu \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2$ tel que $(\varepsilon_1 | \varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2 | \varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = -\frac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\epsilon'_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\epsilon'_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\epsilon'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Solution de 11 :

Vecteur normal à $P : (1, 0, -1)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p_P((x, y, z)) = (x, y, z) - \frac{(1, 0, -1) \cdot (x, y, z)}{2} (1, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}(x+z), y, \frac{1}{2}(x+z)\right)$$

Donc $p_P(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, $p_P(e_2) = e_2$ et $p_P(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Produit scalaire

Solution de 15 :

Par symétrie, il suffit de montrer par exemple que f est linéaire.

Soient $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $f(x + \lambda x') = f(x) + \lambda f(x')$.

On calcule, pour $y \in E$,

$$\begin{aligned} (f(x + \lambda x') - f(x) - \lambda f(x') | y) &= (f(x + \lambda x') | y) - (f(x) | y) - \lambda(f(x') | y) \\ &= (x + \lambda x' | g(y)) - (x | g(y)) - \lambda(x' | g(y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $f(x + \lambda x') - f(x) - \lambda f(x') \in E^\perp = \{0\}$.

Solution de 16 :

1. L'existence vient de Gram-Schmidt.

Pour l'unicité, on prend deux suites (P_n) , (Q_n) convenant, et pour tout n , on décompose $P_n \in \text{Vect}(Q_0, \dots, Q_n)$ et on obtient $P_n = Q_n$ par orthogonalité.

2. XP_{n-1} de degré n et unitaire se décompose dans la base orthogonale $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en $XP_{n-1} = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1} + P_n$, avec $\lambda_i = \frac{(P_i | XP_{n-1})}{\|P_i\|} = \frac{(XP_i | P_{n-1})}{\|P_i\|} = 0$ si $i < n-2$ pour des raisons de degré.

Solution de 18 : Décomposition QR et inégalité de Hadamard – oral Mines

1. Si $(c_1, \dots, c_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A , A est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique (pour lequel, donc, $\mathcal{B}_c$ est orthonormale). Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par le procédé de Schmidt. On a alors, avec des notations habituelles :

$$P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Mais $P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$, matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, est orthogonale. Et l'algorithme de Schmidt garantit que, pour tout k ,

$$C_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

où l'on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ (on a en effet, pour tout k ,

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_k) \quad)$$

et donc...ça marche.

2. On écrit le système équivalent $RX = Q^T B$, c'est un système triangulaire.
3. Visiblement non, vu le (petit) choix dans l'algorithme de Gram-Schmidt. Mais allons plus loin : à quelle condition a-t-on $QR = Q_0 R_0$ où Q et Q_0 sont orthogonales, R et R_0 triangulaires supérieures inversibles ?

On remarque que l'égalité étudiée équivaut à

$$Q_0^{-1} Q = R_0 R^{-1}$$

où le premier membre est une matrice orthogonale, le second une matrice triangulaire supérieure.

Le problème est donc : quelles sont les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures ?

Construisons une telle matrice M : M est triangulaire supérieure donc son inverse M^{-1} l'est aussi. Or $M^{-1} = M^T$ est triangulaire inférieure donc M est nécessairement diagonale. Comme les colonnes de M sont normées, les coefficients diagonaux valent ± 1 . Réciproquement, de telles matrices sont bien orthogonales et triangulaires supérieures.

Autre argument possible : le premier vecteur colonne de M est unitaire et seule le premier coefficient est possiblement non nul, donc vaut $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Son deuxième vecteur colonne est orthogonal au premier, son premier coefficient est donc nul. Donc seul son deuxième coefficient est non nul, et vaut nécessairement ± 1 car il est unitaire. Il vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi de suite...

Bref,

$$\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) = \{D_\varepsilon, \varepsilon \in \{-1, 1\}^n\}$$

où, si $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $D_\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On conclut que

$$QR = Q_0 R_0 \iff \exists \varepsilon \in \{-1, 1\}^n \quad R = D_\varepsilon R_0 \text{ et } Q = Q_0 D_\varepsilon$$

(on s'est servi du fait que D_ε était sa propre inverse).

Grosso modo, cela signifie que dans deux décompositions QR , au signe près on retrouve les mêmes coefficients.

4. (a) L'inégalité, qui s'écrit $0 \leq \|C_1\| \dots \|C_n\|$, est vraie.

(b) $C_k = Q C'_k$

(c) Donc

$$\|C_k\|^2 = C_k^T C_k = (QR_k)^T (QR_k) = R_k^T Q^T Q R_k = R_k^T R_k = \|R_k\|^2.$$

(On pourrait aussi utiliser le fait que Q représente une isométrie en base orthonormale au lieu de le redémontrer).

Or, pour tout k ,

$$\|C'_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k R_{i,k}^2} \geq |R_{k,k}|$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\prod_{k=1}^n |R_{k,k}| = |\det(R)| = |\det(M)|.$$

(d) Oui. Si et seulement si la matrice R est diagonale, d'après ce qui précède. Et donc si et seulement si les colonnes de M forment une famille orthogonale.

Solution de 20 :

Cauchy-Schwarz.

Solution de 21 :

Cauchy-Schwarz.

Solution de 22 :

1. f est facilement linéaire sur un espace de dimension finie, son injectivité suffit.

Or si $f(x) = 0_E$, $\|x\| = |(a|x)|$. Comme $\|a\| = 1$, c'est un cas d'égalité de Cauchy-Schwarz donc x est colinéaire à a : on a $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$. Mais alors $f(x) = 0_E = \lambda a - \lambda \|a\|^2 b = \lambda(a - b)$.

On en déduit que

- si $a \neq b$, $\lambda = 0$ et $\text{Ker } f = \{0_E\}$ donc f est injectif donc bijectif.
- si $a = b$, on reconnaît l'expression de la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}a)^\perp$ qui n'est pas bijective ($f(a) = 0_E$ et $a \neq 0_E$).

Autre rédaction possible : on complète (a) en une base orthonormée $\mathcal{B} = (a, e_2, \dots, e_n)$ de E .

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1-b_1 & & & (0) \\ -b_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -b_n & (0) & & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant $1 - b_1 = 1 - (a|b)$, donc f

est bijective si et seulement si $(a|b) \neq 1$.

Or $(a|b) = 1 \iff (a|b) = |(a|b)| = \|a\| \|b\| \iff a$ et b positivement liés $\iff a = b$ car ils sont de même norme.

2. En utilisant la matrice, on a $\chi_f = (X - 1 + (a|b))(X - 1)^{n-1}$ et $A - I_n$ est de rang 1 si et seulement si $b \neq 0_E$.

Donc f est diagonalisable si et seulement si $b = 0_E$ ou $(b \neq 0_E \text{ et } (a|b) \neq 0)$.

Solution de 23 :

1. On a

$$\|A^T X\|^2 = X^T A A^T X = \langle X, A A^T X \rangle$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|A^T X\|^2 = \langle X, A A^T X \rangle \leq \|X\| \|A A^T X\| \leq \|X\| \|A^T X\|.$$

Ainsi,

$$\|A^T X\| \leq \|X\|$$

et ce, que $A^T X = 0$ ou non.

2. Si $AX = X$ alors

$$\|A^T X - X\|^2 = \|A^T X\|^2 - 2\langle A^T X, X \rangle + \|X\|^2 \leq 2(\|X\|^2 - X^T A X) = 0.$$

On en déduit $A^T X = X$.

3. Soit $X \in \text{Ker}(A - I_n) \cap \text{Im}(A - I_n)$.

On a $AX = X$ (et donc $A^T X = X$) et il existe $Y \in E$ vérifiant $X = AY - Y$.

$$\|X\|^2 = \langle X, AY - Y \rangle = X^T AY - X^T Y.$$

Or

$$X^T AY = (A^T X)^T Y = X^T Y$$

et donc $\|X\|^2 = 0$. Ainsi,

$$\text{Ker}(A - I_n) \cap \text{Im}(A - I_n) = \{0\}.$$

Enfin, le théorème du rang

$$\dim \text{Ker}(A - I_n) + \text{rg}(A - I_n) = \dim E$$

permet de conclure

$$E = \text{Ker}(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n).$$

Projection orthogonale

Solution de 25 : Oral Mines

Le sens direct s'appelle inégalité de Bessel, c'est du cours (et une conséquence du théorème de Pythagore.)

L'autre sens est moins évident et se voit bien sur un dessin par contraposée.

On suppose que la projection p n'est pas orthogonale, et on cherche un vecteur $x \in E$ tel que $\|p(x)\| > \|x\|$.

p étant la projection sur F parallèlement à G , avec $G^\perp \neq F$, il apparaît assez clairement sur un dessin que si $x \in G^\perp \setminus F$, $\|p(x)\| > \|x\|$. Vérifions-le.

On a $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$. Comme $x \in G^\perp$, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$\|p(x)\|^2 = \|x - (x - p(x))\|^2 = \|x\|^2 + \|x - p(x)\|^2 > \|x\|^2$$

car $x \notin F$ donc $x - p(x) \neq 0_E$. Reste à voir que $G^\perp \setminus F \neq \emptyset$, c'est-à-dire $G^\perp \not\subset F$. Si ce n'était pas le cas, par égalité des dimensions, on aurait $G^\perp = F$, ce qui est exclu ici.

On peut aussi faire une preuve directe, plus astucieuse. On suppose que la projection p sur F parallèlement à G est telle que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Si $(x, y) \in F \times G$ et $t \in \mathbb{R}$, on considère

$$\|p(tx + y)\|^2 = t^2 \|x\|^2 \leq \|tx + y\|^2 = t^2 \|x\|^2 + 2t(x|y) + \|y\|^2$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2t(x|y) + \|y\|^2 \geq 0$ ce qui implique $(x|y) = 0$ (comme dans la preuve de Cauchy-Schwarz dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique positive : reconnaître une équation de droite ou faire $t \rightarrow \pm\infty$).

Distance à un sous-espace

Solution de 27 :

Dans ce genre d'exercice qui se pose à l'oral, l'important est d'identifier un problème de projection orthogonale. Comme dans l'exercice précédent. Ensuite, il faut trouver la réponse aux questions suivante : dans quel espace ? ici, assez clairement, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour quel produit scalaire ? ici, le produit scalaire canonique, qui est donné par

$$(U|V) = \sum_{i,j} U_{i,j} V_{i,j} = \text{tr}(U^T V)$$

Sur quel sous-espace ? sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Une bonne idée est de déterminer une base orthonormale de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire canonique. Une meilleure est de montrer que, pour ce produit scalaire canonique,

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Alors le théorème de projection orthogonale dit que la borne inférieure recherchée est un minimum, atteint en un point unique :

$$M = P_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

et valant

$$\left\| \frac{1}{2}(A - A^T) \right\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} (a_{i,j} - a_{j,i})^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

Solution de 28 :

Il s'agit de la distance euclidienne de X^3 au sous-espace de dimension finie $F = \mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ sur $\mathbb{R}_X$.

Il est atteint en l'unique $P_F(X^3) = aX^2 + bX + c \in F$ tel que $X^3 - P_F(X^3) \in F^\perp$, donc est orthogonal à X^2 , X et 1 .

On trouve $a = c = 0$ et $b = \frac{1}{5}$ après calculs.

Solution de 29 : Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit

1. Supposons $u_n = \alpha_{n-1}u_{n-1} + \dots + \alpha_1 u_1$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\langle u_i, u_n \rangle = \alpha_{n-1} \langle u_i, u_{n-1} \rangle + \dots + \alpha_1 \langle u_i, u_1 \rangle$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, u_n \rangle \end{pmatrix} = \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, u_{n-1} \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, u_{n-1} \rangle \end{pmatrix} + \dots + \alpha_1 \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle \end{pmatrix}$$

que l'on peut lire de la manière suivante :

$$c_n = \alpha_{n-1}c_{n-1} + \dots + \alpha_1 c_1$$

où les c_k sont les colonnes de la matrice de Gram $G(u_1, \dots, u_n)$. Les colonnes étant liées, le déterminant est nul.

Dans le cas général, il n'est pas nécessaire que u_n soit combinaison linéaire des autres u_i . Mais si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée, au moins un des u_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_k . Et on conclut de la même manière, en montrant que la colonne c_i est alors combinaison linéaire des autres.

2. Rappelons que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$G_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle$$

et, la base $(e_1, \dots, e_n)$ étant orthonormale,

$$A_{i,j} = \langle e_i, u_j \rangle$$

Mais d'autre part (calcul du produit scalaire dans une base orthonormale) :

$$\begin{aligned} G_{i,j} &= \sum_{k=1}^n \langle e_k, u_i \rangle \langle e_k, u_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n A_{k,i} A_{k,j} \\ &= (A^T A)_{i,j} \end{aligned}$$

et donc

$$G = A^T A$$

On en déduit

$$\det(G) = (\det A)^2 > 0$$

($A \in GL_n(\mathbb{R})$). En fait, on peut dire plus : G est symétrique définie positive.

3. La dernière colonne de $G(u_1, \dots, u_n, x)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \\ \langle x, x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, z \rangle \\ \langle u_2, z \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, z \rangle \\ \langle x, z \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle u_1, x-z \rangle \\ \langle u_2, x-z \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x-z \rangle \\ \langle x, x-z \rangle \end{pmatrix}$$

où z est le projeté orthogonal de x sur $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Donc :

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \\ \langle x, x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, z \rangle \\ \langle u_2, z \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, z \rangle \\ \langle z, z \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \langle x - z, x - z \rangle \end{pmatrix}$$

Utilisons la linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne. On obtient, notant $g(\dots) = \det(G(\dots))$:

$$g(u_1, \dots, u_n, x) = g(u_1, \dots, u_n, z) + \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \dots & \langle u_1, u_n \rangle & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \dots & \dots & \langle u_n, u_n \rangle & 0 \\ \langle z, u_1 \rangle & \dots & \dots & \langle z, u_n \rangle & \|x - z\|^2 \end{vmatrix}$$

(on réutilise le fait que $\langle u_k, x \rangle = \langle u_k, z \rangle + \langle u_k, x - z \rangle = \langle u_k, z \rangle$). On développe alors par rapport à la dernière colonne le dernier déterminant ; tenant compte de la nullité de $g(u_1, \dots, u_n, z)$ (famille liée), on conclut :

$$g(u_1, \dots, u_n, x) = \|x - z\|^2 g(u_1, \dots, u_n)$$