Séries entières

- Bien connaître la définition du rayon de convergence, mais savoir aussi
  - Qu'il est souvent utile de passer par le critère de d'Alembert. Attention : il faut des modules/valeurs absolues et que les termes ne s'annulent plus au moins à partir d'un certain rang.
  - Que certains comportement ne peuvent se produire que sur le cercle de convergence : c'est pratique pour avoir le rayon (exemple : suite bornée mais série divergente ou bien série semi-convergente).
  - Qu'il ne faut pas se précipiter sur des considérations sur des séries : souvent le caractère borné ou non, ou bien le fait que le terme général tende ou non vers 0 permet de trouver des inégalités sur le rayon de convergence. En vrac :
    - Si $(u_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$.
    - Si $(u_n z^n)$ est non bornée, alors $|z| \geqslant R$.
    - Si $(u_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z| \leqslant R$.
    - Si $(u_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $|z| \geqslant R$.
    - Si $\sum u_n z^n$ converge, alors $|z| \leqslant R$.
    - Si $\sum u_n z^n$ diverge, alors $|z| \geqslant R$.
- **À propos de la convergence** : il y a convergence normale (donc uniforme) sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence (et donc au voisinage de chacun de ses points) mais il n'y a pas en général de convergence uniforme sur tout le disque, même ouvert : on a besoin d'une distance de sécurité avec le cercle.
  L'étude de la convergence sur le cercle est en général technique. Parfois le théorème spécial des séries alternées permet d'avoir une convergence uniforme sur des rayons du disque fermé.
- **Propriétés de la somme** : elle est continue sur le disque ouvert de convergence, et (avec une variable réelle) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert.
  On peut, dans cet intervalle ouvert de convergence, dériver et intégrer terme à terme.
  La somme peut se prolonger en certains points du cercle, mais dans ce cas on est ramené à des problèmes du type évoqué ci-dessus. Le théorème d'Abel radial peut donner la continuité en certains points du cercle.
- **Calcul de la somme d'une série entière** : en général avec les DSE des fonctions usuelles qu'il faut parfaitement connaître, et les opérations : combinaison linéaire, produit (de Cauchy), changement de variable, dérivation, primitivation. Penser aussi aux décompositions en éléments simples pour les fractions rationnelles.
  Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, pour calculer la somme des séries entière $\sum P(n)x^n$ et $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$, on décompose P dans la base $(Q_k)_k$ où $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$, et pour tout k, $Q_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$, afin de faire apparaître des séries entières dérivées ou primitivées.
- **Calcul d'une somme de série en utilisant une série entière** : Le calcul de la somme de la série $\sum u_n$ (dont on aura préalablement montré la convergence) peut s'envisager de la manière suivante : on définit la série entière $\sum u_n z^n$, dont le rayon de convergence est au moins égal à 1. Si on arrive à calculer sa somme au moyen des fonctions usuelles (cf ci-dessus) sur le disque ouvert de rayon 1, si on arrive à montrer la continuité de la somme en 1, on peut achever le calcul.
- **Développabilité en série entière** : Attention aux fausses idées : être de classe $\mathscr{C}^\infty$ ne suffit pas pour être développable en série entière. Il n'est pas suffisant non plus que sa série de Taylor ait un rayon de convergence non nul. MAIS : Si la fonction est développable en série entière, le DSE est nécessairement la série de Taylor. On utilise
  - Les DSE de fonctions usuelles : combinaisons linéaires, changement de variable, intégration, dérivation, produit de Cauchy, décomposition en éléments simples.
  - On peut aussi utiliser une équation différentielle (cf ci-après).
  - La majoration du reste dans la formule de Taylor avec reste intégrale, pour essayer de conclure à la convergence (simple suffit) de la série de Taylor vers la fonction. Autrement dit, on cherche à majorer le reste pour montrer qu'il converge simplement vers 0 sur un intervalle $]-R,R[$. Rappelons que l'inégalité de Taylor-Lagrange est une majoration (la plus grossière) du reste intégrale, elle suffit parfois pour conclure mais ce n'est pas toujours le cas.
- **Solutions d'une équation différentielle développable en série entière** :
  1. Supposer (analyse) avoir une fonction DSE avec un rayon $R > 0$.
  2. Traduire le fait qu'elle soit solution de l'équation différentielle **par équivalences**.
  3. En déduire ses cœfficients par unicité de ceux-ci (en général, on a une relation de récurrence).
  4. Vérifier qu'effectivement, le rayon est > 0 (synthèse).
  5. Exprimer éventuellement la solution avec les fonctions usuelles.

Exercices vus en cours

1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n} z^n$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^n$
5. $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$
6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^4+n^3+1}{2\sqrt{n}+3} z^n$
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$

2 CCINP 20 – Rayons de convergence

3 CCINP 21 – Rayon de convergence

4 Oral Mines

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est le n^{e} chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$.

5 Oral X

Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$.

6

Soit R, R', R'' le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$. Montrer que $R = \min(R', R'')$.

7 CCINP 15 – Convergence normale et série entière

8 CCINP 18 – Modes de convergence et continuité

9 CCINP 47 – Rayon de convergence et somme

10 CCINP 23 – Série dérivée et classe $\mathscr{C}^1$

11 CCINP 19 – Dérivée réelle et produit de Cauchy complexe

12

1. Déterminer le rayon de convergence R, puis calculer sur $]-R,R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
2. Si $n \geqslant 1$, on pose $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Déterminer le rayon de convergence r de $\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n$ et calculer pour $x \in]-r,r[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n$

13 Une condition suffisante de continuité sur le disque fermé

Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est R, si $R \in]0,+\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, montrer que $f\ :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R,R]$.

14 Une fonction non DSE dont la série de Taylor a un rayon de convergence infini

1. Montrer que f, prolongement par continuité de $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ en 0, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de Taylor de f a un rayon de convergence infini.
3. Montrer que la fonction f n'est pas développable en série entière.

15

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0)=1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$.

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

16

En utilisant le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$, déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

17 DSE de Arcsin et Arccos :

Justifier que Arcsin est développable en série entière et donner son développement et son rayon de convergence.

Même question pour Arccos.

18 CCINP 51 – Un calcul de somme de série et DSE de Arcsin

19 CCINP 2 – DES ; DSE et DL

20 CCINP 22 – Rayon de convergence d'une somme

21 CCINP 32 – Solution DSE d'une EDL

22 CCINP 24 – Calcul d'une série entière et classe C^∞ d'une fonction

23

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} x^n$.

24

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n-1)(n+2)} x^n$.

25 Une application des séries génératrices

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant k points fixes. On pose $D_{0,0}=1$ et $d_n = D_{n,0}$ désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\mathfrak{S}_3$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.

2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$ puis que $D_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
4. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x|<1$.
5. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
6. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Autres exercices

26

Déterminer les rayons de convergence des séries entières

1. $\sum (\sin n) z^n$
2. $\sum 3^{-n}(1+2/n)^n z^{4n}$
3. $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) z^n$
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n} z^n$
5. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch} n}{n} z^n$
6. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} z^n$
7. $\sum_{n\geqslant 1} \binom{2n}{n} z^n$
8. $\sum_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} z^n$
9. $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) z^n$
10. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n z^n$
11. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$
12. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) z^n$

27

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n$ en la variable réelle x.
2. La série converge-t-elle pour les valeurs R et $-R$ de la variable ?
3. Démontrer que la convergence est uniforme sur le segment $[-R,0]$.
4. Etudier la limite en R (à gauche) de $(R-x)S(x)$ où S désigne la fonction somme de la série entière.

28

Développer en série entière la fonction $t \longmapsto \int_0^t \sin(u^2)\,du$.

29 Oral CCINP

Montrer, pour tout $t \in [-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.

30

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0. Démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0,1]$. En partant des développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\operatorname{Arctan} x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2 \qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

C'est la manière la plus commode, avec le programme, d'aboutir à la somme de la série harmonique alternée. Il est donc intéressant de savoir faire cette démonstration.

31 **Oral TPE** Ecrire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ sous forme d'une somme de série.

32 Ecrire comme somme d'une série simple l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ après avoir prouvé son existence.

33 Trouver le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$. On note $f(x)$ sa somme.

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$, si $x>0$?.

34 Pour chacune des séries entières suivantes, préciser le rayon de convergence et calculer la somme au moyen des fonctions usuelles.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^3 z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+2}{n!} z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n(n+2)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left((3+2(-1)^n)^n\right) x^n$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$
8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\sin(n\theta)$
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (\sin n) z^n$

Pour l'un d'eux, on pourra utiliser le complexe j...

35 **Première question d'un problème des Mines !**

Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(\exp x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

36 Développer en série entière, si c'est possible, les fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence.

1. $x \longmapsto (1+x)\ln(1+x)$
2. $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$
3. $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$ (une petite astuce permet d'obtenir des calculs simples)
4. $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}^2 x$ en utilisant une équation différentielle liant la dérivée et la dérivée seconde.
5. $x \longmapsto \sin^2 x$ sans, quasiment, faire de calculs.

37 **Une application des séries génératrices** En utilisant des séries entières, déterminer le terme général de la suite de Fibonnaci donnée par $F_0=0$, $F_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$.

38 **Écrits CCINP 2024**

Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) : $x^2y''+4xy'+\left(2-x^2\right)y=1$ sur $]0,+\infty[$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que pour tout $x\in I$, $f(x)=\dfrac{\mathrm{ch}\,x-1}{x^2}$.

39 **L'anneau intègre des séries entières de $R\geqslant 1$**

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites de cœfficients complexes de séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

L'addition et le produit de Cauchy de deux séries entières munissent $\mathscr{A}$ d'une structure d'anneau commutatif.

Montrer que $\mathscr{A}$ est intègre.

40 **Une fonction $\mathscr{C}^\infty$ non développable en série entière**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-\mathrm{i}tx)}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.
   On pourra reconnaître la fonction Γ et utiliser nos connaissances (bien que HP) dessus.
3. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.
   La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

41 **Transformation d'Abel et théorème d'Abel - voir aussi CCP 2005**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R (on suppose que R est un réel strictement positif). Soit z_0 un nombre complexe de module R, tel que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge. On veut démontrer qu'alors la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0,z_0]$. (Théorème d'Abel)

1. On se place dans le cas où $z_0=R=1$. Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $\rho_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.
   Soit x un élément du segment $[0,1]$. Pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul p, démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = \rho_n x^{n+1} - \rho_{n+p} x^{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \rho_k x^k (x-1)$ (remarquer que $a_k=\rho_{k-1}-\rho_k$).
   En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \rho_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \rho_k x^k (x-1)$
   En déduire la convergence uniforme de $\sum a_n x^n$ sur le segment $[0,1]$.
2. Démontrer que le cas général peut se ramener au cas précédent.
3. Soit θ un élément de $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On rappelle (cela se démontre à l'aide d'une transformation d'Abel) que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ converge. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} z^n$. Son rayon de convergence est donc au moins égal à 1. On note ϕ sa somme. Démontrer que, pour tout réel $t\in[0,1[$,
   $$\phi(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(1-2t\cos\theta+t^2\right)$$
   (on pourra d'abord calculer $\phi'(t)$).
   En déduire, en utilisant le résultat du 1., que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left(2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)$
   Calculer, de manière analogue, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$.