Exercices vus en cours

Solution de 5 : La fonction Γ

1. En effet, la fonction $f_x\ :\ t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$, positive.
   - Intégrabilité sur $[1,+\infty[$: par croissances comparées, $\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann. Ici, pas de condition sur x.
   - Intégrabilité sur $]0,1]$: $\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x-1>-1$, i.e. $x>0$.

   Donc $\boxed{\Gamma \text{ est définie sur } \mathbb{R}_*^+.}$

2. Par intégration par parties, si $0<\varepsilon<A$,
$$\int_\varepsilon^A \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\mathrm{e}^{-t}\,\frac{t^x}{x}\right]_{t=\varepsilon}^{t=A} + \frac{1}{x}\int_a^A \mathrm{e}^{-t}\,t^x\,\mathrm{d}t \tag{1}$$
   Mais, par croissances comparées,
$$\mathrm{e}^{-A}\frac{A^x}{x} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$
   et de plus
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\frac{\varepsilon^x}{x} \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$
   On en déduit, en prenant les limites quand $\varepsilon\to 0$ et $A\to+\infty$ dans (1),
$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$
   C'est-à-dire $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$ Comme $\Gamma(1)=1$, $\boxed{\text{pour tout } n\geqslant 1,\ \Gamma(n)=(n-1)!.}$

3. On définit
$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1} \end{array}\right.$$
   Et on constate facilement que

   H1 Pour tout $t>0$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

   H2 Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$.

   H3 **Domination** *La domination, pour la continuité de Γ, est à la fois un peu technique et très importante.*
   Soit $S=[a,b]$, $0<a<b$. On a
$$\forall (x,t)\in S\times]0,+\infty[\qquad 0\leqslant e^{-t}\,t^{x-1}\leqslant \phi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}\,t^{a-1} & \text{si} \quad t\leqslant 1 \\ e^{-t}\,t^{b-1} & \text{si} \quad t>1 \end{cases}$$
   Rien n'empêche une fonction « dominatrice » d'être définie par morceaux.
   Si on n'aime pas, on peut aussi bien dire :
$$\forall (x,t)\in K\times]0,+\infty[\qquad e^{-t}\,t^{x-1}\leqslant \phi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)$$
   ou encore
$$\forall (x,t)\in K\times]0,+\infty[\qquad e^{-t}\,t^{x-1}\leqslant \phi_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)$$
   ϕ est continue, positive, intégrable sur $]0,1]$ car $\phi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$ avec $1-a<1$ et sur $[1,+\infty[$ car $\phi(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, avec $2>1$.

   Le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique bien : $\boxed{\Gamma\in\mathscr{C}(\mathbb{R}_*^+).}$

4. On reprend
$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-t}\,t^{x-1} = \mathrm{e}^{-t+(x-1)\ln t} \end{array}\right.$$
   Et on constate facilement que

   H1 Pour tout $t\in]0,+\infty[$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$ avec pour tout $k\in\mathbb{N}$:
$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\ :\ (x,t)\longmapsto (\ln t)^k\,f(x,t).$$

H2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x>0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

H3 **Dominations :** Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $K=[a,b]$ avec $0<a<b$. On a

$$\forall (x,t) \in K \times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi_k(t) = \begin{cases} |\ln t|^k \, e^{-t} t^{a-1} & \text{si} \quad t \leqslant 1 \\ |\ln t|^k \, e^{-t} t^{b-1} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

avec ϕ_k positive, continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, intégrable sur $]0,1]$ car $\phi_k(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $1-a<\alpha<1$ et sur $[1,+\infty[$, car $\phi \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Par théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètres, $\boxed{\Gamma \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\Gamma^{(k)} : (x,t) \mapsto \int_0^{+\infty} (\ln t)^k f(x,t) \, \mathrm{d}t.}$$

5. D'après ce qui précède, $\Gamma'' \geqslant 0$.
6. Appliquer Cauchy-Schwarz à $f : t \mapsto \sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ et $g : t \mapsto \ln t \sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ sur $[a,b]$ puis faire $a \to 0$ et $b \to +\infty$.
   On en déduit que $(\ln \circ \Gamma)'' \geqslant 0$.
7. Théorème de Rolle, puis croissance stricte de Γ'.
8. $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \to \Gamma(1) = 1$ par continuité.
9. La limite existe par monotonie et $\Gamma(n) = (n-1)! \to +\infty$.
10. À x fixé, Appliquer le théorème de convergence dominée à $f_n : t \mapsto \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathbb{1}_{]0,n]}(t)$.
    Pour la domination, utiliser l'inégalité de convexité $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \ \ln x \leqslant x-1$.
    Dominatrice : $\phi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

Autres exercices

Solution de 6 :

On trouve le domaine de définition : $]-1,+\infty[$. Sur lequel f est de classe C^1 (domination sur tout segment). Et on a

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

On primitive, en remarquant que f a pour limite 0 en $+\infty$ (théorème de convergence dominée),

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$$

Solution de 7 :

La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, prolongeable par continuité en 0 (elle a pour limite x en 0), seul se pose donc le problème de l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$. Mais on a, par croissances comparées,

$$\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t}\right)$$

donc, $\sin$ étant bornée,

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve par comparaison à l'exemple de Riemann l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ et, par suite, sur $]0,+\infty[$. L'intégrale est bien définie.

Définissons maintenant

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)}{t} \end{array} \right.$$

H1 Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\frac{\partial h}{\partial x} : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t}\cos(xt)$$

H2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur cet $]0,+\infty[$ d'après l'étude initiale.

H3 Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

H4 **Domination :** On a alors

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

et ϕ est indépendante de x, continue (*par morceaux* suffirait), intégrable sur $]0,+\infty[$ car positive et d'intégrale égale à 1.

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on conclut : l'application

$$f \; : \; x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On calcule facilement en interprétant comme partie réelle d'une intégrale facile à calculer, puis on primitive, et on utilise $f(0) = 0$.

Solution de 8 : Oral Centrale

Le domaine de définition est $\mathbb{R}_*^+$. Le changement de variable $u = x + t$, $t = u - x$ permet de sortir x de l'intégrale. D'où assez facilement la classe $\mathscr{C}^\infty$.

Solution de 10 : Oral Mines

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{x^2+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 en lui donnant en général la valeur 0, sauf si $x = 0$ (valeur $1/2$). Comme elle est $\underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, la comparaison avec les fonctions de Riemann donne l'intégrabilité. On définit sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$ la fonction h par

$$h(x,t) = \frac{1-\cos t}{x^2+t^2}$$

est continue, et la domination

$$|h(x,t)| \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2}$$

montre bien la continuité. Pour la classe C^1, h est dérivable par rapport à x, et pour tous $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{-2x(1-\cos t)}{(x^2+t^2)^2}$$

est continue par rapport à chacune de ses variables, la domination

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b(1-\cos t)}{(a^2+t^2)^2}$$

(où $0 < a < b$) montre la classe C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$. Donc sur $\mathbb{R}_*$ par parité. Il est possible de montrer que f n'est pas C^1 en montrant que f' a une limite infinie en 0. C'est un peu technique.

La limite en $+\infty$ est nulle (convergence dominée). La limite en 0 est

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

(théorème de convergence dominée ou continuité). Et est donc un équivalent, car elle est non nulle. La recherche d'un équivalent en $+\infty$ est plus délicate. On essaye de « faire sortir » de l'intégrale quelque chose qui tend vers 0, en effectuant une intégration par parties ou un changement de variable. Le changement de variable le plus naturel serait $t = xu$ qui ferait sortir un $1/x$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\mathrm{d}u\right)$$

et une intégration par parties de l'intégrale figurant dans cette expression donne l'équivalent $\dfrac{\pi}{2x}$.

Solution de 11 : Oral Mines

On étudie cette intégrale comme fonction de u :

$$f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-iux}\mathrm{d}x$$

On voit qu'elle est C^1 assez facilement (c'est une transformée de Fourier, les dominations sont donc faciles). Par intégration par parties, on trouve une relation entre $f'(u)$ et $f(u)$: en effet, si on a bien trouvé

$$f'(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}-ix\mathrm{e}^{-x^2-iux}\mathrm{d}x$$

on peut se servir du x pour intégrer par parties, en primitivant $x\mathrm{e}^{-x^2}$ et en dérivant e^{-iux} :

$$f'(u)=-i\left(\left[\frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-iux}\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}(-iu)\mathrm{e}^{-iux}\mathrm{d}u\right)$$

ce qui donne

$$f'(u)=-\frac{u}{2}f(u)$$

On en déduit l'existence d'une constante K telle que

$$\forall u\in\mathbb{R}\qquad f(u)=K\exp(-u^2/4)$$

Mais on « sait » :

$$K=f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

Solution de 12 : Oral Centrale ; Mines

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ se prolongeant par continuité à $[0,+\infty[$ et étant $\underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$, or $3>1$...Définissons, sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

$$h\ :\ (x,t)\mapsto\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[\qquad\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$$

qui constitue une domination irréprochable. On ne s'attarde pas sur les hypothèses autres que la domination, elles sont faciles à vérifier. On aboutit au fait que f est C^1 sur $\mathbb{R}$, sa dérivée valant en tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

que l'on calcule en décomposant en éléments simples, supposant $x\notin\{-1,0,1\}$. On cherche a,b,c,d tels que

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}=\frac{at+b}{1+x^2t^2}+\frac{ct+d}{1+t^2}$$

La parité nous montre d'abord que $a=c=0$. On réduit au même dénominateur, on voit que $b+d=1$ et $b+dx^2=0$, d'où les valeurs de b et d et la décomposition

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}=\frac{x^2}{x^2-1}\frac{1}{1+x^2t^2}-\frac{1}{x^2-1}\frac{1}{1+t^2}$$

Il faut alors éviter de se tromper avec le signe de x...supposons donc $x>0$ et $x\neq1$ dorénavant. Alors

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2(x+1)}$$

Cette valeur est encore valable pour $x=1$ car f' est continue. Compte tenu de $f(0)=0$ on obtient

$$\forall x\geqslant0\qquad f(x)=\frac{\pi}{2}\ln(x+1)$$

et pour $x<0$, par imparité, on trouve $-f(-x)$...L'intégrale demandée se calcule par parties pour se ramener à $f(1)$.

Solution de 13 : Oral Centrale

Il est prudent de commencer par étudier l'existence, qui ne pose pas trop de problèmes. On montre ensuite que f est de classe C^2 (domination facile). Sa dérivée seconde se calcule sans grande difficulté : on trouve

$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Mais $f(0)=f'(0)=0$, une double primitivation donne alors

$$f(x)=x\text{Arctan}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Solution de 15 : Convolution « temporelle »

Aucun problème de définition ; le changement de variable $t=x-u$, $u=x-t$ donne la commutativité. Pour la continuité, comme la variable figure à la fois dans une borne et à l'intérieur de l'intégrale, comme il n'est pas possible de la faire sortir de l'intégrale, on la fait au contraire rentrer en effectuant le changement de variable $t=xu$, qui donne

$$(f\star g)(x)=x\int_0^1 f(xu)g(x(1-u))\mathrm{d}u$$

Ensuite, le théorème de continuité sous le signe $\int$, avec une domination sur tout segment (on ne peut pas faire mieux) : si K est un segment inclus dans $\mathbb{R}^+$, soit $M\geqslant 0$ tel que $K\subset[0,M]$; en définissant h sur $\mathbb{R}^+\times[0,1]$ par

$$h(x,t)=f(xu)g(x(1-u))$$

on a

$$\forall(x,t)\in K\times[0,1]\qquad |h(x,t)|\leqslant N_\infty(f|_{[0,M]})N_\infty(g|_{[0,M]})$$

qui constitue une domination valable, une fonction constante étant intégrable sur $[0,1]$.

Solution de 16 : Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet

2. On trouve
$$g(x)=\cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\,-\,\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$

4. On a vu que f et g étaient continues sur $[0,+\infty[$.
Montrons que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$:
Pour cela, on définit
$$h:\mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[\mapsto\mathbb{R}(x,t)\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$$
• Pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$, la fonction $h(x,.)\ :\ t\mapsto h(x,t)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $[0,+\infty[$, intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude du domaine de définition de f).
• h est deux fois dérivable (davantage, même !) par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et
$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}_*^+\times]0,+\infty[\quad\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)=\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$$
• Pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$, les fonctions $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,.)$ sont continues (par morceaux suffirait) sur $[0,+\infty[$, intégrables sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous).
• Pour tout $t\in[0,+\infty[$, les fonctions $\dfrac{\partial h}{\partial x}(.,t)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(.,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_*^+$.
• **Domination :** Soit a, b tels que $0<a<b$ et $S\subset[a,b]$. Si $k=1$ ou $k=2$, on peut majorer :
$$\forall(x,t)\in S\times[0,+\infty[\quad\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\frac{t^k\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2}$$
et $\phi_S\ :\ t\mapsto\dfrac{t^k\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2}$ est indépendante de x, continue (*par morceaux* suffirait), intégrable sur $[0,+\infty[$ par comparaison à l'exemple de Riemann (en effet, par croissances comparées, $\dfrac{t\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2}=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$).
En appliquant deux fois le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on conclut :
f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$, et
$$\forall x>0\qquad f''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt$$

d'où l'on tire facilement $f''(x)+f(x)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,dt=\frac{1}{x} \quad (x>0)$.

Montrons que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$:
On a vu que l'on pouvait écrire, sur $\mathbb{R}_*^+$,

$$g(x)=\phi(x)\ \cos x+\psi(x)\ \sin x$$

où ϕ et ψ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$, de dérivées $\phi'(x)=-\frac{\sin x}{x}$ et $\psi'(x)=\frac{\cos x}{x}$. Donc g est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$, et, pour tout $x>0$,

$$g'(x)=\cos x\ \phi'(x)-\sin x\ \phi(x)+\cos x\ \psi(x)+\sin x\ \psi'(x)=-\sin x\ \phi(x)+\cos x\ \psi(x)$$

ce qui permet de dire que g' est de classe C^1, donc g de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$, et, pour tout $x>0$,

$$g''(x)=-\sin x\ \phi'(x)-\cos x\ \phi(x)+\cos x\ \psi'(x)-\sin x\ \psi(x)=\frac{1}{x}-g(x)$$

d'où découle le résultat.

5. La fonction $f-g$ est solution sur $\mathbb{R}_*^+$ de l'équation $y''+y=0$, elle est donc de la forme $t\mapsto a\cos t+b\sin t$ ou $t\mapsto A\cos(t+\phi)$. Mais on remarque que f a pour limite 0 en $+\infty$, par caractérisation séquentielle de la limite et théorème de convergence dominée, ou par simple majoration :

$$0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,dt=\frac{1}{x}$$

et de même, comme ϕ et ψ ont des limites nulles en $+\infty$, c'est aussi le cas de g. Donc $A=0$ (on peut aussi dire qu'une fonction périodique ayant une limite en $+\infty$ est constante), donc $f=g$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Par continuité en 0, $f(0)=g(0)$, et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}$$