Vrai ou faux

1. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.
2. Si $f\in\mathscr{C}([a,+\infty[)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $x\mapsto\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f de limite nulle en $+\infty$.
3. Dire que « f est intégrable sur I », $\displaystyle\int_I f$ converge absolument ou encore $\displaystyle\int_I |f|$ converge, c'est la même chose.
4. f positive est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.
5. $x\mapsto\dfrac{1}{x^\alpha}$ n'est jamais intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$.
6. Si deux fonctions sont équivalentes en $+\infty$, elles sont simultanément intégrables ou non intégrables sur $[a,+\infty[$.
7. Si f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et nulle.
8. Si $f,g\in\mathscr{C}^1(]a,b[)$, alors $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature.

Solution de 1 : ex CCINP 19

1. On pose, pour tout entier naturel n, $f_n : t\in]0,1]\mapsto t^n\ln t$.
   Pour tout entier naturel n, f_n est continue par morceaux sur $]0,1]$.
   On a $t^{\frac12}|f_n(t)|\xrightarrow[t\to0]{}0$ donc, au voisinage de 0, $|f_n(t)|=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^{\frac12}}\right)$.
   Or, $t\mapsto\dfrac{1}{t^{\frac12}}$ est intégrable sur $]0,1]$(fonction de Riemann intégrable). Donc f_n est intégrable sur $]0,1]$.
   De plus, pour $x\in]0,1]$, par intégration par parties

$$\int_x^1 t^n\ln t\,dt=\left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}\right]_x^1-\int_x^1\frac{t^n}{n+1}dt=-\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

   On en déduit, en faisant tendre x vers 0, que $\boxed{I_n=-\dfrac{1}{(n+1)^2}}$.

Solution de 2 : CCINP 25

$f:t\longmapsto\dfrac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.
De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $0\leqslant\dfrac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$ donc, dans avec

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}<+\infty$$

donc $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ converge et donc, par positivité, f est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Autre rédaction possible : dans $[0,+\infty]$,

$$0\leqslant\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^ne^{-t}}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}<+\infty$$

Solution de 3 : CCINP 26

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,+\infty[$, $f_n(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)^n}$.

1. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$.
De plus, $|f_n(t)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$.
Or $n\geqslant 1$, alors $t\longmapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc, par règle d'équivalence pour les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Or f_n est continue sur$[0,1]$, donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. (a) $\forall t\in[0,+\infty[$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ car $1+t^2\geqslant 1$.
En intégrant, on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}\leqslant I_n$.
Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Solution de 4 : CCINP 28

1. Soit $f : x\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ continue sur $]2,+\infty[$. De plus,

Sur $]2,3]$

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{x\to 2}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\times\frac{1}{(x-2)^{1/2}}.$$

Or $x\longmapsto \dfrac{1}{(x-2)^{1/2}}$ est intégrable sur $]2,3]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]2,3]$ car $\dfrac{1}{2}<1$).
Donc, par comparaison, f est intégrable sur $]2,3]$.

Sur $[3,+\infty[$

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}=g(x.)$$

Or $x^2g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ par croissances comparées donc, au voisinage de $+\infty$, $g(x)=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Comme $x\longmapsto\dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[3,+\infty[$, on en déduit que g est intégrable sur $[3,+\infty[$.
Donc, par comparaison, f est intégrable sur $[3,+\infty[$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]2,+\infty[.}$

2. **Cas particulier d'intégrales de Bertrand** : soit a un réel strictement positif. On pose $f : x\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$, fonction continue sur $]0,+\infty[$.

Sur $]0,\mathrm{e}]$

$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}\ln x=g(x).$$

Or $\sqrt{x}g(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$ donc, au voisinage de 0, $g(x)=o\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)$.
Or $x\longmapsto\dfrac{1}{x^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]0,1]$ car $1/2<1$).
Donc g est intégrable sur $]0,\mathrm{e}]$, et, par comparaison, f est intégrable sur $]0,\mathrm{e}]$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.

Sur $[\mathrm{e},+\infty[$

$$f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{x^a}=h(x).$$

si $a>1$, prenons γ tel que $1<\gamma<a$.

$$x^\gamma h(x)=x^{\gamma-a}\ln x\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

donc, au voisinage de $+\infty$, $h(x)=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$.
Or $x\longmapsto\dfrac{1}{x^\gamma}$ est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ car $\gamma>1$), donc h est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.
Ainsi, par comparaison, f est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.

si $a\leqslant 1$,

$$\forall x\in[\mathrm{e},+\infty[,\ h(x)\geqslant\frac{1}{x^a}\geqslant 0$$

(C'est la raison pour laquelle on a coupé l'intervalle en e.)
Or $x\longmapsto\dfrac{1}{x^a}$ non intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ (fonction de Riemann avec $a\leqslant1$), donc, par comparaison de fonctions positives, h n'est pas intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.
Ainsi, par équivalence, f n'est pas intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.

Finalement, $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[\text{ si et seulement si } a>1.}$

Solution de 5 : CCINP 29

1. Soit $x \in]0,+\infty[$.
   La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est définie, positive et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \longmapsto t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de Riemann avec $1-x<1$).
   Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$. (*)
   De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(x,t)=0$, donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $f(x,t)=o(\dfrac{1}{t^2})$.

   Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).
   Donc $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. (**)
   Donc, d'après (*) et (**), $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. Par intégration par parties $\displaystyle\int_\varepsilon^A \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t} t^x\right]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   On passe ensuite à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$ et $A \to +\infty$ et on obtient :
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   C'est-à-dire $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

Solution de 6 :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{1} (-\ln t)^\alpha\,\mathrm{d}t$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{t})\,dt$

   La fonction $t \longmapsto \cos(\sqrt{t})$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   On effectue le changement de variable $u=\sqrt{t}$, $t=u^2$. L'existence de l'intégrale équivaut à celle de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} 2u\cos u \,\mathrm{d}u$$

   et en cas d'existence elles sont égales. Or, déjà $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos u\,\mathrm{d}u$ ne converge pas, alors celle-ci...On peut calculer par parties $\displaystyle\int_0^{x} u\cos u\,\mathrm{d}u$ et voir qu'il n'y a pas de limite en $+\infty$. Ou encore dire que l'aire sous une arche est grande : si $k \geqslant 1$,

$$\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} u\cos u\,\mathrm{d}u \geqslant (-\pi/2+2k\pi)\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} \cos u\,\mathrm{d}u = (4k-1)\pi$$

(On a pris soin de considérer une zone de positivité du cosinus, pour pouvoir multiplier des inégalités par $\cos u$ sans en changer le sens). Or si $\displaystyle\int_0^x u\cos u\ \mathrm{d}u$ avait une limite réelle en $+\infty$, $\displaystyle\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} u\cos u\ \mathrm{d}u$ tendrait vers 0 quand $k\to+\infty$ (relation de Chasles).

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\ dx$

La fonction $\tan$ est continue, positive sur $[0,\pi/2[$. Plusieurs méthodes sont tout aussi valables :

• Un équivalent : $\tan(x)=\dfrac{1}{\tan(\pi/2-x)}\sim_{x\to\pi/2}\dfrac{1}{\pi/2-x}$, donc pas d'intégrabilité (comparaison à une fonction de Riemann), pas plus de convergence d'intégrale puisque pour une fonction positive c'est la même chose.

• Un calcul de $\displaystyle\int_0^X \tan x\ dx$ (avec un $\ln$) qui aboutit bien sûr à la même conclusion.

• un changement de variable $x=\mathrm{Arctan}(u)$. Même conclusion.

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$

La fonction $t\longmapsto\dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est continue, négative sur $]0,1[$. Notons-la f. On a

$$f(t)\sim_{t\to0}\ln t$$

donc, par croissances comparées,

$$|f(t)|=\underset{t\to0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$$

(valeurs absolues facultatives, mais recommandées) ce qui donne l'intégrabilité sur $]0,1/2]$. Mais aussi

$$f(t)\sim_{t\to1}-\sqrt{1-t}$$

et donc f est prolongeable par continuité à $]0,1]$, pas de problème donc d'intégrabilité sur $[1/2,1[$.

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}\qquad(\alpha\in\mathbb{R})$

La fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue positive sur $]0,+\infty[$, continue sur $[0,+\infty[$ si $\alpha\geqslant0$ et prolongeable par continuité à $[0,+\infty[$ si $\alpha<0$ (elle a dans ce dernier cas pour limite 0 en 0). Si $\alpha<0$, $f(t)\sim_{t\to+\infty}1$. Si $\alpha=0$, $f(t)\sim_{t\to+\infty}\dfrac{1}{2}$. Si $\alpha>0$, $f(t)\sim_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t^\alpha}$. Par comparaison à une fonction de Riemann, il y a intégrabilité (ou convergence de l'intégrale, ici c'est la même chose) si et seulement si $\alpha>1$.

12. $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}dx$ (α, β réels).

La fonction $f\ :\ x\longmapsto\dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ est continue positive sur $[e,+\infty[$. Si $\beta>1$, fixons $\gamma\in]1,\beta[$. Par croissances comparées,

$$f(x)=\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$$

et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, f est intégrable sur $[e,+\infty[$.
Si $\beta<1$, par croissances comparées,

$$\frac{1}{x}=\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$$

et donc,par comparaison à une intégrale de Riemann, f n'est pas intégrable sur $[e,+\infty[$.
Si $\beta=1$ et $\alpha>0$, encore non intégrabilité par le même argument.
Si $\beta=1$ et $\alpha=0$, non intégrabilité directe (Riemann).
Si $\beta=1$ et $\alpha<0$, on ne peut plus utiliser de comparaison (ce n'est plus assez « fin »), on calcule

$$\int_e^X\frac{(\ln x)^\alpha}{x}dx$$

car on sait trouver une primitive (on distingue le cas $\alpha=-1$, la primitivation se fait avec un $\ln(\ln x)$, sinon la primitivation se fait avec une puissance de $\ln x$). On trouve qu'il y a intégrabilité si et seulement si $\alpha<-1$. Bien sûr on a déjà rencontré ce genre de chose, c'est une intégrale « de Bertrand ».

13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$

    Fonction continue, positive sur $[1,+\infty[$. Il est judicieux d'obtenir un équivalent en $+\infty$. Pour cela, classiquement, mise en facteur dans $1+x$ du terme prédominant, x :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x} &= x^{1/2}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}-1\right)\\ &= x^{1/2}\left(1+\frac{1}{2x}+\underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\\ &\sim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^{1/2}}\end{aligned}$$

    Donc $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x} \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x^{3/2}}$, ce qui donne l'intégrabilité par comparaison à l'exemple de Riemann $(3/2>1)$.

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}P(t)\,\mathrm{d}t$ où P fonction polynomiale

    Fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$. Par croissances comparées, $\left|e^{-t^2}P(t)\right| = \underset{t\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité.

15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$

    Fonction continue sur $]0,+\infty[$; intégrabilité sur $]0,1[$ assez simple grâce à l'équivalent

$$\left|\frac{\sin\sqrt{t}}{t}\right| \sim_{t\to0} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

    et la référence à Riemann.

    D'autre part, par changement de variable $t=u^2$, $u=\sqrt{t}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$ a même nature (et dans le cas de convergence, même valeur) que $\displaystyle 2\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$, intégrale notoirement semi-convergente (mais il faut savoir le redémontrer). Convergence, donc, on peut même dire semi-convergence. Une astuce consistait à écrire le dénominateur $\sqrt{t}\times\sqrt{t}$, intégrer par parties car on sait primitiver $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$, on aboutit au même résultat.

16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}\,\mathrm{d}t$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^t+t^2\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$

18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha\in\mathbb{R}$

19. Intégrale de Bertrand

Solution de 8 :

1. Soit $\varepsilon>0$. On a $A\in\mathbb{R}$ tel que si $x\geqslant A$, $\left|f(x)-\ell\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{a}$. Alors, si $x\geqslant a$,

$$\left|\int_x^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t-a\ell\right| = \left|\int_x^{x+a}(f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+a}\left|f(t)-\ell\right|\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$$

    On peut aussi effectuer le changement de variable $u=t-x$ et appliquer le théorème de convergence dominée (sur le segment $[0,a]$, il suffit de dominer la fonction continue f par une constante comme $\|f\|_\infty$.)

    Puis

$$\int_0^x\big(f(t+a)-f(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x+a}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+a}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t \to \boxed{\int_0^{+\infty}\big(f(t+a)-f(t)\big)\,\mathrm{d}t = a\ell-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.}$$

2. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\text{Arctan}(t+1)-\text{Arctan}\, t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\int_0^1\text{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

Solution de 13 :

Par sommation des relations de comparaison dans le cas de convergence, au voisinage de 1,

$$\text{Arccos}\, x=-\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\sim\frac{-1}{\sqrt{2}}\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x}=\sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

Autre raisonnement possible, $\text{Arccos}\, x\xrightarrow[x\to1]{}0$ donc

$$\text{Arccos}\, x\sim\sin(\underbrace{\underbrace{\text{Arccos}\, x}_{\in[0,\pi]})}_{\geqslant0}=+\sqrt{1-\cos^2(\text{Arccos}\, x)}=\sqrt{1-x^2}\sim\sqrt{2}\sqrt{(1-x)}.$$

Solution de 14 :

$g:x\mapsto\ln(\ln(1+x))$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, au voisinage de 0,

$$f(x)=\ln(x+\mathrm{o}(x))=\ln x+\ln(1+\mathrm{o}(1))=\ln x+\mathrm{o}(\ln x)\sim\ln x$$

donc, par sommation des relations de comparaison dans le cas de convergence, la fonction de référence $\ln$ étant négative sur $]0,1]$ (il suffit de tout multiplier par -1 pour se mettre dans le contexte du programme),

$$f(x)\sim\int_0^x\ln t\,\mathrm{d}t=\Big[t\ln t-t\Big]_0^x=x\ln x-x=x\ln x+\mathrm{o}(x\ln x)\sim x\ln x$$

Solution de 16 : CCINP – Mines-Telecom

1. Soient $x,y>0$.
   La fonction
   $$f:t\mapsto\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+x)}$$
   est définie et continue par morceaux sur $]0;+\infty[\supset]0;y]$ et quand $t\to0$,
   $$f(t)=\frac{t}{t(t+x)}=\frac{1}{t+x}\to\frac{1}{x}$$
   donc f est prolongeable par continuité en 0 . Par suite, l'intégrale définissant $G(x,y)$ existe bien.
   Quand $t\to+\infty$,
   $$f(t)\underset{t\to+\infty}{=}\frac{\mathrm{O}(1)}{t(t+x)}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
   donc f est intégrable sur $]0;+\infty$ [. Par suite, $G(x,y)$ converge quand $y\to+\infty$ vers
   $$G(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+x)}\mathrm{d}t$$

2. On remarque que
   $$\frac{1}{t(t+n)}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+n}\right)$$
   et l'on en déduit
   $$G(n,y)=\frac{1}{n}\int_0^y\left(\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}-\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t+n}\right)\mathrm{d}t.$$
   Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient
   $$G(n,y)=\frac{1}{n}\left(\int_0^y\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t-\int_n^{y+n}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$
   Enfin par la relation de Chasles
   $$G(n,y)=\frac{1}{n}\left(\int_0^n\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t-\int_y^{y+n}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

3. Puisque

$$0 \leqslant \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{y}\int_y^{y+n} (t - \lfloor t \rfloor)\mathrm{d}t \leqslant \frac{n}{y}$$

on obtient quand $y \to +\infty$

$$G(n) = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t$$

et l'on a alors

$$H(n) = \int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Par suite,

$$H(n) - H(n-1) = \int_{n-1}^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u}{u + (n-1)}\mathrm{d}u$$

puis

$$H(n) - H(n-1) = 1 - (n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$

Par développement limité, on obtient

$$H(n) - H(n-1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2(n-1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la série de terme général

$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}\right).$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n}\left(H(k) - H(k-1) - \frac{1}{2k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} S + o(1)$$

donc

$$H(n) - H(1) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} S + \mathrm{o}(1).$$

Sachant

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

on obtient

$$H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)$$

puis

$$G(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2n}.$$

Solution de 17 :

Passer par les sommes partielles et utiliser la formule de Stirling.

Réponse : $\ln\frac{2}{\pi}$.

Soit $A \geqslant 1$ et $N = \lfloor A \rfloor$. Alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{(-1)^n}{x}\,\mathrm{d}x + \int_N^A \frac{(-1)^N}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + (-1)^{\lfloor A \rfloor}\ln\frac{A}{\lfloor A \rfloor}$$

On a déjà $1 \leqslant \frac{1}{\lfloor A \rfloor} < 1 + \frac{1}{\lfloor A \rfloor}$ et $A \mapsto (-1)^{\lfloor A \rfloor}$ bornée donc $(-1)^{\lfloor A \rfloor}\ln\frac{A}{\lfloor A \rfloor} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$.

On continue le calcul en séparant dans la somme partielle les termes de rang pair et les termes de rang impair.

Supposons, sans perte de généralité, que N est impair et s'écrit $N = 2p+1$ (si N est pair, cela revient à sortir un terme de la somme partielle, dont la limite est nulle). On écrit alors

$$\sum_{n=1}^{2p}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{p}\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{p}\ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right) = \ln\left(\frac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p}\,p!^4}\right) = 2\ln(2p)! + \ln(2p+1) - 4p\ln 2 - 4\ln p!$$

La formule de Stirling permet d'écrire

$$\ln p! = \ln\left(\sqrt{2\pi p}\,p^p \mathrm{e}^{-p}\right) + \mathrm{o}(1) = p\ln p - p + \frac{1}{2}\ln p + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \mathrm{o}(1)$$

et donc

$$\ln(2p)! = 2p\ln(2p) - 2p + \frac{1}{2}\ln(2p) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \mathrm{o}(1) = 2p\ln p + 2(\ln 2 - 1)p + \frac{1}{2}\ln p + \frac{1}{2}\ln(4\pi) + \mathrm{o}(1)$$

donc, en réinjectant,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2p}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= 2\left(2p\ln p + 2(\ln 2 - 1)p + \frac{1}{2}\ln p + \frac{1}{2}\ln(4\pi) + \mathrm{o}(1)\right) + \ln 2 + \ln p + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{2p}\right)}_{\to 0} - (4\ln 2)p - 4\left(p\ln p - p + \frac{1}{2}\ln p + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \mathrm{o}(1)\right)\\ &= \ln(4\pi) + \ln 2 - 2\ln(2\pi) + \mathrm{o}(1)\\ &= \ln\frac{2}{\pi} + \mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'intégrale converge et sa valeur est } \ln\frac{2}{\pi}.}$