1. Exercices traités en cours

2. Continuité

L'exercice suivant permet de généraliser (ou non) ce type de raisonnement.

3. Uniforme continuité

Solution de 12 :

$\ln$ présente un problème d'uniforme continuité au voisinage de 0 (asymptote verticale). On peut utiliser des suites. L'avantage ici, est que $\ln(x_n)-\ln(x'_n)$ se réécrit, se qui permet de trouver facilement des suites (x_n) et (x'_n) tendant vers 0 contredisant l'uniforme continuité.

Pour $f : x \mapsto x\ln x$ commencer par tracer la courbe (ça fait réviser les études de fonctions) et se rendre compte que la branche parabolique au voisinage de $+\infty$ risque de poser problème.

Chercher des suites au voisinage de $+\infty$, par exemple, $x_n = n$ et $x'_n = n + h_n$ où on cherche $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ tel que $f(x'_n)-f(x_n) \not\to 0$ ce qui se trouve en faisant un développement asymptotique...

Solution de 13 :

Pas de miracle ici, il faut sortir les ε.

Traduire l'uniforme continuité sur une seule période ne suffit pas il y des problèmes de raccord (cas de deux points, l'un se ramenant au début de la période et l'autre à la fin) : il faut le faire sur un intervalle de deux périodes, puis se ramener dans cet intervalle.

Solution de 14 :

Sortir les ε.
Au voisinage de $+\infty$, les variations sont contraintes par la convergence.
Ailleurs, on est sur un segment donc cela se passe bien.
Reste à gérer le raccord...

4. Dérivabilité

Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Pour toute fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à valeurs complexes telle que $f(a)=f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a,b[$.

Solution de 15 : Très classique (jusqu'à 4.)

5. (a) Le résultat est immédiat si $a=0$ ou $b=0$. On suppose donc $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

   Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $b=1$ (quitte à tout diviser par b).

   Si P est scindé, il s'écrit $P=\lambda\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)^{m_k}$ avec $x_1<\cdots<x_n$ et comme dans la question précédente, chaque x_k est racine de P' de multiplicité m_k-1, ce qui donne $\deg P-n$ racines de $aP+P'$ comptées avec multiplicité. Il en manque encore n.

   L'idée astucieuse est de considérer $f:x\mapsto P(x)\mathrm{e}^{ax}$ qui se dérive en $f':x\mapsto(P'(x)+aP(x))\mathrm{e}^{ax}$ possédant les mêmes zéros que $P'+aP$.

   Or f s'annule en tous les x_k et possède une limite nulle soit en $+\infty$, soit en $-\infty$. En appliquant n fois le théorème de Rolle (éventuellement généralisé), on obtient n zéros distincts et distincts des x_k de f' donc les n racines qu'il nous manquait de $P'+aP$ qui est bien scindé.

   Ensuite, pour (b), question amusante, qu'on aurait pu poser de manière moins déroutante...

   On a

$$\sum_{k=0}^{d}a_kP^{(k)}=[P(D)](P)$$

Mais $P=\lambda\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$, les α_i n'étant pas distincts. Donc

$$[P(D)](P)=\lambda(D-\alpha_q Id)\circ\cdots\circ(D-\alpha_1 Id)(P)$$

Or la question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout $k\geqslant 1$,

$$[(D-\alpha_q Id)\circ\cdots\circ(D-\alpha_1 Id)](P)$$

est scindé...

Solution de 16 :

Applications itérées du théorème de Rolle, en remarquant que 1 et -1 sont racines d'ordre n de $(X^2-1)^n$.

Solution de 18 : Dérivées successives d'arctangente

Utiliser une récurrence puis une généralisation du théorème de Rolle.

Solution de 19 : Théorème de Darboux

1. On suppose, sans perte de généralités, que $f(a)>0$ et $f(a)<0$. On aimerait adapter la preuve du théorème de Rolle en distant que le maximum que f atteint en étant continue sur le segment $[a,b]$ est atteint dans $]a,b[$ mais on ne peut pas le dire directement car f' n'est pas supposée continue donc on ne peut pas conclure de l'hypothèse car f est strictement croissante au voisinage de a et strictement décroissante au voisinage de b.

   Cependant, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\xrightarrow[x\to a^+]{}f'(a)>0$ donc au voisinage de a, $f(x)-f(a)>0$ soit $f(x)>f(a)$ et de même, au voisinage de b, $f(x)>f(b)$ ce qui assure que ce maximum est atteint dans $]a,b[$. La condition nécessaire d'extremum local permet bien de conclure.
2. Si, plus généralement, f dérivable sur I, $a,b\in I$ distincts et m tel que $f'(a)<m<f'(b)$, alors $g=f-m\,\mathrm{id}$ est dérivable sur $[a,b]$ et la première question nous dit que g' s'annule donc que m est atteinte par f' sur $]a,b[$.

Solution de 20 : Égalité de Taylor-Lagrange

Poser $\varphi(x) = f(b) - \left(f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + A(b-x)^{n+1} \right)$ avec A tel que $\varphi(a) = 0$ et appliquer le théorème de Rolle puis conclure.

Ou bien poser $\varphi(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + A(x-a)^{n+1} \right)$ avec A tel que $\varphi(b) = 0$ et soit appliquer le théorème de Rolle puis une hypothèse de récurrence, soit n fois le théorème de Rolle.

Solution de 21 : Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit $x \in [a, b]$, distinct des x_i (sinon, c'est immédiat, tous les ξ_x conviennent.).

Soit $\varphi : t \mapsto f(t) - P_n(t) - K T(t)$ où K est tel que $\varphi(x) = 0$ (ce qui est possible car $T(x) \neq 0$ car x n'est pas l'un des x_i.)

On a alors que φ est nulle en x et en tous les x_i, soit en $n+2$ points. Comme les fonctions qui la composent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, φ est continue sur les segments et dérivables sur les $n+1$ intervalles ouverts successifs d'extrémités ces points, ce qui nous donne $n+1$ zéros distincts (dans $]a, b[$) de φ' en appliquant $n+1$ fois le théorème de Rolle.

En réitérant ce procédé à φ', puis φ'', *etc* jusqu'à $\varphi^{(n)}$, ce qui est possible car f donc φ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on obtient par récurrence que pour tout $j \in [\![0, n+1]\!]$, φ^j admet $n+2-j$ zéros distincts (dans $]0, n[$). En particulier, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule en un $\xi_x \in]a, b[$.

Or $\varphi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - P_n^{(n+1)} - K T^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)} - K(n+1)!$ car P_n est de degré au plus n et T est unitaire de degré $n+1$.

On a donc finalement que $K = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ et donc $\boxed{f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} T(x).}$

5. Parties convexes

Solution de 23 : Enveloppe convexe

C'est l'intersection de tous les convexes contenant A.

C'est bien convexe, contenant A et plus petit que tous les autres.

Solution de 24 : Points extrémaux

Pour le premier, un polygone à n côté convient.

Pour le deuxième, un disque ouvert.

Pour le troisième, la partie du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.

Solution de 25 : Théorème de Gauss-Lucas

Quantité conjuguée....

$0 = \sum \lambda_k (z - x_k)$ avec $\lambda_k = \dfrac{1}{|z - x_k|^2}$.

6. Fonctions convexes

Solution de 26 :

1. Il suffit de composer l'inégalité de convexité avec la fonction croissante.
2. Composer avec l'exponentielle.

Solution de 27 :

Vérifier que $((1-t)f(x)+tf(y))((1-t)g(x)+tg(y)) \leqslant (1-t)f(x)g(x)+tf(y)g(y)$ en développant puis factorisant la différence.

Solution de 28 :

Elle est convexe, en passant par la définition, directement.

Solution de 29 : Inégalité de Bernoulli

$f : x \mapsto x^{n+1}$ est convexe, sa tangente en 1 a pour équation $y=(n+1)(x-1)+1$.

Solution de 30 :

Concavité de $\ln\circ\ln$.

Solution de 31 :

Convexité de $g : x \mapsto x^2-2f(x)$ appliquée en $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1$.

Solution de 32 :

En notant θ_k les angles au centre, pour un n-gone inscrit dans un cercle de rayon R, le périmètre est $\sum_{k=1}^{n} 2R\sin\theta_k$ avec $\sin$ concave sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Solution de 33 : Inégalité de Jensen continue (Oral CCINP - Écrit Centrale)

Indications :

1. Riemann + Jensen discret.
2. Courbe au dessus de la tangente.
3. $\gamma=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé :

1. Définissons, pour tout $n\geqslant 1$, $S_n=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$. C'est une somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n}$ sur le segment $[a,b]$. En utilisant la convexité de ϕ,
$$\phi\left(\frac{S_n}{b-a}\right)=\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$$
Mais $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$,
$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t$,
ϕ est continue, les inégalités larges « sont conservées à la limite »...On conclut donc.
2. C'est du cours (le graphe de ϕ est au-dessus de ses tangentes).
3. Donc, pour tout $t\in[a,b]$,
$$\phi\left(f(t)\right)\geqslant\phi(\gamma)+\left(f(t)-\gamma\right)\phi'(\gamma)$$
On intègre entre a et b ($a<b$, donc l'inégalité ne change pas de sens), ce qui donne
$$\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t\geqslant(b-a)\phi(\gamma)+\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\gamma(b-a)\right)\phi'(\gamma)$$
En particulier, prenons $\gamma=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t$, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

4. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, l'inégalité s'écrit :
$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$
ou encore
$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$
ce qui est bien une inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left(\int_a^b 1\times f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right)$$
5. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire
$$\frac{b-a}{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$
ou encore
$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$
(inégalité rencontrée par exemple dans un exercice d'oral X avec $a=0$, $b=1$, ce qui la rend plus esthétique :
$$1 \leqslant \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$
Mais en tout cas, Cauchy-Schwarz fonctionne encore ici, en prenant les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$.

Solution de 34 :

Convexité de $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$.

Solution de 35 :

Sinon, si on a $x<y$ tels que $f(x)<f(y)$. Si $z>y$, $\tau_x(y)\leqslant\tau_x(z)$ donne $f(z)\geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)$ donc $f(z)\xrightarrow[z\to+\infty]{}+\infty$ ce qui est contradictoire.

Si on a $x<y$ tels que $f(x)>f(y)$. Si $z<x$, $\tau_x(z)\leqslant\tau_x(y)$ donne $f(z)\geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)$ donc $f(z)\xrightarrow[z\to-\infty]{}+\infty$ ce qui est contradictoire.

Sur $\mathbb{R}^+$, une demi-droite convient, ou $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

Solution de 36 :

Si $x>1$, $\tau_0(1)\leqslant\tau_0(x)$ donne $f(x)\geqslant (f(1)-f(0))x+f(0)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

Solution de 37 : Branche infinie d'une fonction convexe

1. Utiliser la croissance d'une fonction taux d'accroissement en un point quelconque.
$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x-1}{x}\tau_1(x)+\dfrac{1}{x}$ qui a une limite finie ou $+\infty$ par théorème de la limite monotone.
2. Remarquer que ℓ est aussi la limite de tout taux d'accroissement qui est croissant.
Si $x\leqslant y$, $\tau_x(y)\leqslant\ell$ donne $f(y)-\ell y\leqslant f(x)-\ell x$ et conclure par le théorème de la limite monotone dans le cas décroissant.

7. Intégrales sur des segments

A. Calculs de primitives et d'intégrales

Solution de 38 :

Indication :

1. IPP
2. IPP et transfromer $\sin^2$ et linéariser.
3. CV
4. CV
5. Direct
6. DES
7. Méthode classique
8. DES
9. $+\cdots-\cdots$ ou CV

Réponses :

1. $t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{e}^{-t}+C$ $(\mathbb{R})$
2. $\dfrac{1}{3}t\cos^3 t-t\cos t+\dfrac{2}{3}\sin t+\dfrac{1}{9}\sin^3 t+C$ $(\mathbb{R})$
3. $2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{t}+C$ $(\mathbb{R}_*^+)$
4. $\dfrac{\ln(1+\ln^2 t)}{2}+C$ $(\mathbb{R}_*^+)$
5. $\dfrac{\mathrm{Arctan}\,t^6}{6}+C$ $(\mathbb{R})$
6. $\dfrac{\ln\left|t^2-1\right|-2\ln|t|}{2}+C_k$ $(I_1=]-\infty,-1[$ ou $I_2=]-1,0[$ ou $I_3=]0,1[$ ou $I_4=]1,+\infty[)$
7. $\dfrac{1}{2}\ln(t^2+2t+2)-\mathrm{Arctan}(t+1)+C$ (R) et $\mathrm{Arctan}(t-1)+C$ $(\mathbb{R})$
8. $t+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|-\mathrm{Arctan}\,t+C_k$ sur $I_1=]-\infty,-1[$ ou $I_2=]-1,1[$ ou $I_3=]1,+\infty[$
9. $t-\ln\left(\mathrm{e}^t+1\right)$
10. $t-\dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)$

B. Manipulations d'intégrales

Solution de 40 :

Intégrer $g: t\mapsto f(t)-t$.

Solution de 41 :

Appliquer le TAF à $\ln(f)$ sur $[x,x+1]$.

Réponse : e^{α}.

Solution de 42 :

Vérifier que $I_n\to 1$ (intuitif) en majorant $|I_n-1|$.

Puis faire une IPP dans cette majoration.

Réponse : $-\dfrac{\ln 2}{n}$.

Solution de 45 :

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

C. Intégrale dépendant des bornes

D. Sommes de Riemann

Solution de 49 :

Utiliser une somme de Riemann.

E. Formules de Taylor

Solution de 51 :

1. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale ou bien l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$.
2. Déterminer le minimum de $\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{M_2 h}{2}$ à l'aide d'une étude de fonction.

Solution de 52 :

1. Continuité sur un segment.
2. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et a : (1)
   Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et b : (2)
   Éliminer les $f'(x)$ avec $(b-x)(1)+(x-a)(2)$, puis majorer en valeur absolue.
3. Pas de difficulté.

Solution de 53 :

Appliquer trois fois la formule de Taylor-Young à l'ordre 3.

Réponse : $f'''(a)$.