Réduction III : Trigonalisation et nilpotence

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

2. Trigonalisation

Solution de 3 : CCINP

$\chi_A = (X-1)^3$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

Solution de 4 : Très classique : trigonalisation simultanée

Le corps de base étant algébriquement clos, $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. v laisse stable $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$, car v et u commutent. Et donc v induit sur $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$ un endomorphisme v_λ. Cet endomorphisme admet un vecteur propre (car le corps de base est algébriquement clos). Or un vecteur propre de v_λ est un vecteur propre de v qui est dans $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$, et donc est aussi vecteur propre pour u.

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$: « si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent, alors il existe P inversibles et T, T' triangulaires supérieures telles que $A = PTP^{-1}$ et $B = PT'P^{-1}$ ».

Pour $n = 1$, c'est bien clair.

Montrons que $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$; soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{C})$ qui commutent. Les endomorphismes u et v de $\mathbf{C}^{n+1}$ canoniquement associés à A et B commutent, donc d'après ce qui précède ont un vecteur propre commun. Dans une base commençant par ce vecteur propre, leurs matrices respectives sont de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A'' \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} \mu & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B'' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

A' et B' commutent, donc, par produit par blocs, A'' et B'' commutent. On peut leur appliquer $\mathscr{P}_n$, il existe donc $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbf{C})$ et T'', U'' triangulaires supérieures telles que

$$P^{-1}A''P = T'' \quad , \quad P^{-1}B''P = U''$$

Soit alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathscr{GL}_{n+1}(\mathbf{C})$; un produit par blocs montre que $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ sont triangulaires supérieures.

3. Réduction par blocs

Solution de 5 :

Si A et B sont trigonalisables, on a P, Q inversibles et T, T' triangulaires telles que $A = PTP^{-1}$ et $B = QT'Q^{-1}$.

Alors $M = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$, les matrices extrêmes étant inverses l'une de l'autre, la matrice interne étant triangulaire.

Solution de 6 : CCINP : convolution

1. Produit par blocs.
2. S'intéresser à $A^{-1} \star B^{-1}$.
3. Trigonaliser.
4. Si les λ_i et μ_j sont les valeurs propres de A et B comptées avec multiplicité,

$$\chi_{A\star B} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_i \mu_j).$$

$$\det(A \star B) = (\det(A)\det(B))^n.$$

$$\mathrm{tr}(A \star B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B).$$

4. Matrices et endomorphismes nilpotents

Solution de 11 : Sous-espaces stables et commutant d'un endomorphisme nilpotent

1. $u^{p-1} \neq \tilde{0}$.
2. Comme $u^{p-1} \neq \tilde{0}$, on a $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0_E$.
   Supposons $\lambda_0 a + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(a) = 0_E$. Si les λ_i ne sont pas tous nuls, soit i indice minimal tel que $\lambda_i \neq 0$.
   En composant par u^{p-1-i}, on obtient $\lambda_i u^{p-1}(a) = 0$ ce qui est contradictoire.
3. Donc $p = \text{taille}(\mathscr{F}) \leqslant \dim E = n$.
4. (a) $\mathscr{B} = \left(u^{n-1}(a), \ldots, u(a), a\right)$ convient.
   (b) Le sens réciproque est immédiat. Supposons $u \circ v = v \circ u$.
   On peut décomposer $v(a) = \sum_{\ell=0}^{n-1} v_\ell u^\ell(a)$ et vérifier que v et $\sum_{\ell=0}^{n-1} v_\ell u^\ell$ sont deux endomorphismes qui coïncident sur tous les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ par commutativité de u et v, ils sont donc égaux : $v = \sum_{\ell=0}^{n-1} v_\ell u^\ell \in \mathbb{K}[u]$.
   (c) i. u^k est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang $n-k$ donc $\dim\left(\operatorname{Ker} u^k\right) = k$.
   ii. u_F est nilpotent sur F qui est de dimension k, donc $u_F^k = \tilde{0}$ donc $F = \operatorname{Ker} u_F^k = F \cap \operatorname{Ker} u^k$ donc $F \subset \operatorname{Ker} u^k$ et par égalité des dimensions, $F = \operatorname{Ker} u^k$.
   iii. Les sous-espaces stables par u sont exactement les $\operatorname{Ker} u^k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.