Réduction III : Trigonalisation et nilpotence

- Méthodes générales :
  - Regarder ce qui se passe en petite dimension (2 ou 3) permet parfois d'éclairer les choses.
  - Pour les endomorphismes, une base bien adaptée au problème permet de le transformer en un problème simple. C'est le cas aussi si l'espace se décompose en somme directe de sous-espaces simples.
  - En travaillant avec des matrices dans $\mathbb{R}$, passer dans $\mathbb{C}$ permet d'avoir des propriétés intéressantes (pour trigonaliser par exemple).
- Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX=\lambda X$ où $A=\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.
- Trigonalisation :
  - Sur $\mathbb{C}$, c'est automatique. On effectue assez rarement des calculs explicites de trigonalisation.
  - Mais le fait que toute matrice complexe soit trigonalisable est d'usage courant.
- Comme les sous-espaces propres sont toujours en somme directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre. Pratique !

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 $A=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
2. Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).

2. Trigonalisation

2 Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A.
2. Démontrer, sans déterminer ses sous-espaces propres, que A n'est pas diagonalisable.
3. Justifier que A est trigonalisable, puis trigonaliser A.
4. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3 **CCINP** Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A puis déterminer une matrice de passage rendant la matrice A semblable à $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 **Très classique : trigonalisation simultanée** On suppose que le corps de base est $\mathbb{C}$ et u et v sont deux endomorphismes qui commutent. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun.

Utiliser ce résultat pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.

Plus généralement, justifier que si deux endomorphismes trigonalisables sur un corps quelconque commutent, alors ils sont simultanément trigonalisables.

3. Réduction par blocs

5 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Montrer que M est trigonalisable si et seulement si A et B le sont.

6 **CCINP : convolution** Pour $A=(a_{i,j}), B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit

$$A\star B=\begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n^2}(B).$$

1. Montrer que si $A, A', B, B'\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $(A\star B)(A'\star B')=(AA')\star(BB')$.
2. En déduire que $A\star B$ est inversible si A et B le sont.
3. Déterminer le spectre de $A\star B$.
4. En déduire la réciproque de 2, le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A\star B$.

4. Matrices et endomorphismes nilpotents

7 Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

8 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $u:\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}\right.$.

1. Montrer que u est un endomorphisme nilpotent et donner son indice de nilpotence.
2. Écrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

9 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

10 Montrer que sur $\mathbb{C}$, une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}$?

11 Sous-espaces stables et commutant d'un endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Démontrer que $\mathscr{F} = \left(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a)\right)$ est une famille libre de E.
3. Retrouver le fait que $p \leqslant n$
4. Dans cette question, on suppose que $p = n$.

   (a) **Matrice**
   Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) **Commutant**
   Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$u \circ v = v \circ u \quad \text{si et seulement si} \quad v \in \operatorname{Vect}\left(\operatorname{id}_E, u, \ldots, u^{n-1}\right) = \mathbb{K}[u].$$

   On pourra introduire les coordonnées de $v(a)$ dans la base précédente.

   (c) **Sous-espaces stables**
   i. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.
   ii. Soit F sous-espace de E stable par u de dimension $k \geqslant 1$.
   En considérant l'endomorphisme u_F induit par u sur F, montrer que $F = \operatorname{Ker} u^k$.
   iii. Quels sont tous les sous-espaces stables par u ?

12 Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

1. Calculer $\det(I_n + N)$.
2. Soit $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\det(A+N)$.
3. Le résultat de la question précédente s'étend-il aux matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?