Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

Solution de 2 :

On cherche donc $\mathrm{Ker}\big((X^4-1)(u)\big)$ avec $X^4-1=(X-1)(X+1)\big(X^2+1\big)$.

Les solutions sont les $x\mapsto A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{-x}+C\cos x+D\sin x$ pour $A,B,C,D\in\mathbb{R}$.

Solution de 3 :

On commence par diagonaliser A : $\mathrm{Sp}\,A=\{1,-3\}$, $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$, $E_{-3}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, donc u est bien diagonalisable.

Notons $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(0,1,-2)$ et $e_3=(1,1,0)$ et classons les sous-espaces stables par dimensions :

- $\{(0,0,0)\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont comme toujours stables par u.
- Les droites stables par u sont les droites
  - $D(\alpha,\beta)=\mathbb{R}(\alpha e_1+\beta e_2)$ pour $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ contenues dans $E_1(A)$.
    Pour éviter les redondances, on peut par exemple considérer
    - $D(1,0)=\mathbb{R}e_1=\mathbb{R}(1,0,1)$ d'équations $\begin{cases}x=z\\y=0\end{cases}$
    - et les droites $D(\alpha,1)=\mathbb{R}(\alpha,1,\alpha-2)$ d'équations $\begin{cases}x=\alpha y\\z=(\alpha-2)y\end{cases}$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.
  - $D'=\mathbb{R}(1,1,0)=E_{-3}(A)$ d'équations $\begin{cases}x=y\\z=0\end{cases}$
- Les plans stables par u sont des plans engendrés par des vecteurs propres : il s'agit donc
  - $P_1=E_1(A)=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ d'équation $z=x-2y$.
  - $P(\alpha,\beta)=\mathrm{Vect}(\alpha e_1+\beta e_2,e_3)$ pour $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.
    De nouveau, on peut éviter les redondances en considérant
    - $P(1,0)=\mathrm{Vect}(e_1,e_3)$ d'équation $x=y+z$
    - pour $\alpha\in\mathbb{R}$, $P(\alpha,1)=\mathrm{Vect}(\alpha e_1+e_2,e_3)$ d'équation $(\alpha-2)(x-y)=(\alpha-1)z$.

2. Un grand classique

Solution de 8 : Diagonalisation simultanée

1. Si u et v sont diagonalisables dans une même base, soit $\mathscr{B}$ une telle base. Deux matrices diagonales commutent, donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v\circ u)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u\circ v)$$
ce qui permet bien de conclure $u\circ v=v\circ u$.
Supposons, réciproquement, $u\circ v=v\circ u$. Notons $\mathrm{Sp}(u)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$ (les λ_i étant deux à deux distincts), et, pour tout i entre 1 et p, $E_i(u)=\ker(u-Quelquescorrigs\lambda_i\,\mathrm{id}_E)$. Comme u est diagonalisable,
$$E=\bigoplus_{i=1}^{p}E_i(u)$$
(on note E l'espace vectoriel sur lequel sont définis u et v). Les $E_i(u)$ sont stables par v (car v commute avec les $u-\lambda_i Id$). Donc v induit sur chaque $E_i(u)$ un endomorphisme v_i qui est, d'après le cours, diagonalisable. Soit $\mathscr{B}_i$ une base de $E_i(u)$ formée de vecteurs propres de v_i, donc de vecteurs propres de v. En concaténant les bases $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_p$, on obtient une base de E (adaptée à $E=\bigoplus_{i=1}^{p}E_i(u)$) formée de vecteurs propres pour u et pour v. Donc u et v sont simultanément diagonalisables.
En termes de matrices : soit A, B deux matrices diagonalisables ; $AB=BA$ si et seulement s'il existe $P\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et D,Δ diagonales telles que $A=PDP^{-1}$ et $B=P\Delta P^{-1}$

2. Montrons par récurrence $\mathscr{P}_n$: « si $u_1, \ldots, u_n$ sont n endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux, il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales ».
   - $\mathscr{P}_2$ a été démontrée.
   - Montrons $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et $u_1, \ldots, u_{n+1}$ $n+1$ endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Soit $E_\lambda(u_{n+1})$ un sous-espace propre de u_{n+1} ; $E_\lambda(u_{n+1})$ est stable par $u_1, \ldots, u_n$, qui induisent sur $E_\lambda(u_{n+1})$ des endomorphismes $u_{\lambda,1}, \ldots, u_{\lambda,n}$. Ces endomorphismes commutent car ils sont induits par des endomorphismes qui commutent. Par $\mathscr{P}_n$, il existe une base de $E_\lambda(u_{n+1})$ formée de vecteur propres communs à $u_{\lambda,1}, \ldots, u_{\lambda,n}$, donc de vecteurs propres communs à $u_1, \ldots, u_n$. Ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de u_{n+1}, puisqu'ils sont dans $E_\lambda(u_{n+1})$. Or $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{n+1})} E_\lambda(u_{n+1})$; en concaténant des bases des $E_\lambda(u_{n+1})$ comme celle qu'on vient de construire, on obtient une base de E formée de vecteur propres communs à $u_1, \ldots, u_{n+1}$. D'où $\mathscr{P}_{n+1}$.

   Pour une famille $(u_i)_{i \in I}$ quelconque d'endomorphismes diagonalisables qui commutent, on commence par remarquer que si on considère une sous-famille finie $(u_j)_{j \in J}$, où J est une partie finie de I, ses éléments sont simultanément diagonalisables (d'après ce qui vient d'être fait).
   Donc toute combinaison linéaire des u_i est diagonalisable.
   Donc tous les éléments de $\mathrm{Vect}(u_i)_{i \in J}$ sont diagonalisables.
   Or ils commutent entre eux (facile). Mais cet espace est de dimension finie (comme sev de $\mathscr{L}(E)$), on peut en prendre une base et lui appliquer le cas « fini », ce qui conclut : tous les éléments de $\mathrm{Vect}(u_i)_{i \in I}$ sont simultanément diagonalisables.

3. Polynômes annulateurs

Solution de 9 :

On calcule $M^2 = 3I_3 - 2M$. Donc M est annulée par le polynôme simplement scindé $X^2 + 2X - 3 = (X-1)(X+3)$: elle est diagonalisable.

π_M étant un polynôme unitaire non constant divisant ce polynôme, il vaut $X-1$, $X+3$ ou $(X-1)(X+3)$.

Comme M n'est pas scalaire, on a nécessairement $\pi_M = (X-1)(X+3)$.

Comme on travaille en dimension 3 avec M diagonalisable, on a que soit 1, soit -3 est valeur propre double, l'autre est simple.

Or $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc 1 est valeur propre double et $\chi_M = (X-1)^2(X+3)$.

On calcule le reste de la division euclidienne de X^n par π_M : $X^n = \pi_M Q + aX + b$ avec $1^n = 1 = a + b$ et $(-3)^n = -3a + b$, d'où on tire $a = \dfrac{1-(-3)^n}{4}$ et $b = \dfrac{3+(-3)^n}{4}$.

Donc, comme $\pi_M(M) = 0_3$, $M^n = \dfrac{1-(-3)^n}{4} M + \dfrac{3+(-3)^n}{4} I_3$.

Solution de 10 :

On suppose que $A^2 + A^\intercal = I_n$. Alors $A = (A^\intercal)^\intercal = \left(I_n - A^2\right)^\intercal = I_n - (A^\intercal)^2 = I_n - \left(I_n - A^2\right)^2 = 2A^2 - A^4$ donc A est annulée par $X^4 - 2X^2 + X = X\left(X^3 - 2X + I_3\right) = X(X-1)\left(X^2 + X - 1\right)$ avec le discriminant du dernier terme > 0 sans avoir ni 0 ni 1 comme racine. Il s'agit donc d'un polynôme simplement scindé ce qui assure la diagonalisabilité de A.

Solution de 11 : Oral CCINP

$X^3 - X$ est scindé simple, les sous-espaces propres sont, classiquement, les sous-espaces engendrés par des familles de vecteurs propres (conséquence de la diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.)

Solution de 12 :

Comme A n'est pas inversible, 0 est valeur propre de A.

Comme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X^2 - 3X + 2) = X(X-1)(X-2)$ est simplement scindé, A est diagonalisable et la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité est égale à $\mathrm{tr}\, A = 3$.

Alors nécessairement, 0 est valeur propres simple, et les deux autres valeurs propres sont 1 et 2, toutes deux simples.

Les solutions sont donc les matrices $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in \mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$.

Solution de 13 :

On propose diverses méthodes, de la plus compliquée à la plus simple, mais avec la possibilité d'obtenir supplémentaires (description des valeurs propres et des sous-espaces propres).

- **Première solution** – écrire la matrice de Φ_A dans une base adaptée. Partons sur la base canonique.
  On calcule, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\Phi_A\left(E_{i,j}\right) = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell} \delta_{\ell,i} E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j}.$$

  On en déduit que $\mathrm{Vect}\left(E_{k,j}\right)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est stable par Φ_A (matrices dont seule la k^{e} colonne est éventuellement non nulle). Il vient que la matrice de Φ_A dans la base

$$\left(E_{1,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n}\right)$$

  est diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux égaux à A :

$$\Phi_A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}.$$

  - Soit on remarque qu'alors $\chi_{\Phi_A} = \left(\chi_A\right)^n$ donc $\mathrm{Sp}\,\Phi_A = \mathrm{Sp}\,A$ et si $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\Phi_A = \mathrm{Sp}\,A$,

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad AX_i = \lambda X_i.$$

    On en déduit que les vecteurs propres de Φ_A sont les matrices non nulles dont les colonnes sont dans le sous-espace propre de A correspondant à la même valeur propre. Or l'ensemble de telles matrice est facilement isomorphe à $E_\lambda(A)^n$ donc de dimension $n \dim E_\lambda(A)$.
    On en tire alors $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\Phi_A} \dim E_\lambda(\Phi_A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\Phi_A} n \dim E_\lambda(A) = n \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\Phi_A} \dim E_\lambda(A)$.
    Donc Φ_A diagonalisable si et seulement si $\displaystyle n \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\Phi_A} \dim E_\lambda(A) = n^2$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\Phi_A} \dim E_\lambda(A) = n$ si et seulement si A est diagonalisable.
  - Soit on s'intéresse alors aux polynômes annulateurs de Φ_A :

$$P(\Phi_A) = 0_{n^2} \iff \begin{pmatrix} P(A) & & & \\ & P(A) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(A) \end{pmatrix} = 0_{n^2} \iff P(A) = 0_n.$$

    Les polynômes annulateurs de Φ_A étant ceux de A, le premier est annulé par un polynôme simplement scindé si et seulement si la deuxième l'est, d'où le résultat.
- **Deuxième solution** – calculer directement le vecteurs propres. Si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M, on remarque que les colonnes de $\Phi_A(M)$ sont les AC_j.
  Donc

$$\Phi_A(M) = \lambda M \iff \forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad AC_j = \lambda C_j.$$

  On en déduit que les valeurs propres de Φ_A sont les mêmes que celles de A et que

$$E_\lambda(\Phi_A) = \left\{\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}, \ \forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad C_j \in E_\lambda(A)\right\}$$

  donc $\dim E_\lambda(\Phi_A) = n \dim E_\lambda(A)$ et on conclut comme dans la méthode précédente.
- **Dernière solution** – la plus efficace sans doute : par récurrence on vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \Phi_A^k \, : \, M \mapsto A^k M$$

  Et, par combinaison linéaire de ces résultats :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \qquad P(\Phi_A) \, : \, M \mapsto P(A)M$$

  Donc $P(\Phi_A) = 0_n \iff \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\ P(A)M = 0_n \iff P(A) = 0_n$ Les polynômes annulateurs de Φ_A et ceux de A sont donc les mêmes. On en déduit que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est (car Φ_A admet un polynôme annulateur scindé simple si et seulement si A admet un polynôme scindé simple). Accessoirement, les valeurs propres de A et de Φ_A sont les mêmes.

Solution de 15 : Oral Mines

L'implication directe est immédiate : elle découle de la stabilité par produit de l'espace des matrices triangulaires supérieures. Inversement, supposons A^k triangulaire supérieure pour tout $k \geqslant 2$. Introduisons le polynôme caractéristique de A

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + (-1)^n \det(A)$$

Puisque celui-ci est annulateur de A, on peut écrire

$$a_n A^n + \cdots + a_1 A + (-1)^n \det(A) \mathrm{I}_n = \mathrm{O}_n$$

En multipliant la relation par A et en réorganisant

$$A = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)} \left(a_1 A^2 + \cdots + a_n A^{n+1}\right)$$

et la matrice A est donc triangulaire supérieure. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^k = \mathrm{O}_2$ pour tout $k \geqslant 2$.

Solution de 16 :

Cas : n est impair. Le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de degré impair, il possède une racine qui sera valeur propre de la matrice et aussi racine de son polynôme minimal. Celui-ci ne peut alors être le polynôme X^2+1. Cas : n est pair. Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_n = \operatorname{diag}(A, \ldots, A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

A_n n'est pas une homothétie donc le degré de son polynôme minimal est supérieur à 2 . De plus, $A_n^2 = -\mathrm{I}_n$ et X^2+1 annule donc A_n. Au final, X^2+1 est polynôme minimal de A_n.

Solution de 17 : Oral CCINP

Si A est diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. On a alors $B = A^p = P^{-1} D^p P$ avec D^p diagonale et donc B est diagonalisable.

Inversement, si B est diagonalisable alors il existe un polynôme annulateur de B scindé à racines simple de la forme $\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$.

De plus, puisque B est inversible, on peut supposer les λ_k tous non nuls.

Sachant $B = A^p$, le polynôme $\prod_{k=1}^{p} (X^p - \lambda_k)$ annule A et est scindé à racines simples d'après le résultat connu sur les racines p^{e} de l'unité.

On en déduit que A est diagonalisable.

Solution de 18 : Oral CCINP

On sait déjà $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$. On a $P = XQ$ avec $Q(0) \neq 0$. Pour $x \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$, on a $u^2(x) = 0$ et $Q(u)(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(Q(u))$ puis $u(x) = 0$ car $Q(0) \neq 0$, donc $X \wedge Q = 1$ et $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Ker}(Q(u))$ sont supplémentaires par le lemme des noyaux. On en déduit $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) \subset \operatorname{Ker}(u)$ puis l'égalité.

L'inclusion $\operatorname{Im}\left(u^2\right) \subset \operatorname{Im}(u)$ est entendue.

Inversement, soit $x \in \operatorname{Im}(u)$. On peut écrire $x = u(a)$ pour un certain $a \in E$. Or $P(u)(a) = 0$ et l'on peut écrire P sous la forme $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X$ avec $a_1 \neq 0$ donc $a_n u^{n-1}(a) + \cdots + a_2 u^2(a) + a_1 x = 0_E$ et

$$x = -\frac{a_n}{a_1} u^{n-1}(a) - \cdots - \frac{a_2}{a_1} u^2(a) = u^2\left(-\frac{a_n}{a_1} u^{n-3}(a) - \cdots - \frac{a_2}{a_1} a\right) \in \operatorname{Im} u^2.$$

Pour $x \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u)$, il existe $a \in E$, $x = u(a)$ et $a \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u)$ donc $x = 0$.

Pour $x \in E, u(x) \in \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)$ et l'on peut écrire $u(x) = u^2(a)$ pour un certain $a \in E$. On a alors $x = y + z$ avec $y = u(a) \in \operatorname{Im}(u)$ et $z = x - y$ où l'on vérifie $z \in \operatorname{Ker}(u)$.

Solution de 19 : Oral CCINP

Méthode : On commence par déterminer un polynôme annulateur de f. On observe

$$f \circ f(M) = \operatorname{tr}(A)(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A) - \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A)A = \operatorname{tr}(A) f(M)$$

Ainsi,

$$f \circ f = \operatorname{tr}(A).f.$$

Cas : $\operatorname{tr}(A) \neq 0$. L'endomorphisme f est diagonalisable car annule le polynôme $X^2 - \operatorname{tr}(A)X$ qui est scindé à racines simples.

Cas : $\operatorname{tr}(A) = 0$. Les valeurs propres de f figurent parmi les racines du polynôme X^2. Seule 0 peut être valeur propre de f et par conséquent f est diagonalisable si, et seulement si, $f = 0$. Cela correspond au cas où $A = \mathrm{O}_n$.

Déterminons maintenant les sous-espaces propres de f. Le cas $A = \mathrm{O}_n$ est immédiat car alors l'endomorphisme f est l'endomorphisme nul. Supposons désormais ce cas exclu. Par le polynôme annulateur $X^2 - \mathrm{tr}(A)X$, on sait

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, \mathrm{tr}(A)\}$$

Soit $M = A$ on remaraue $f(M) = 0$. Le réel 0 est donc valeur propre de A et l'espace propre associé contient au moins Vect (A) : il est de dimension au moins égale à 1 .

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(M) = 0$. On observe

$$f(M) = \mathrm{tr}(A)M = \lambda M \text{ avec } \lambda = \mathrm{tr}(A).$$

On en déduit que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de f et que le sous-espace propre associé contient l'hyperplan des matrices de trace nulle : il est de dimension au moins égale à $n^2 - 1$. On a donc exactement

$$\mathrm{Sp}(f) = \{0, \mathrm{tr}(A)\}$$

Il reste à discuter selon que ces deux valeurs sont distinctes ou non. Cas : $\mathrm{tr}(A) = 0$. L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable et la dimension du sous-espace propre associé à l'unique valeur propre tr (A) est exactement $n^2 - 1$. Cas : $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. L'endomorphisme f est diagonalisable et donc la dimension des sous-espaces propres des valeurs propres 0 et $\mathrm{tr}(A)$ sont respectivement 1 et $n^2 - 1$.

Solution de 20 :

En posant $M = (a_i a_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on vérifie $M^2 = \lambda M$ avec $\lambda = \sum_{k=1}^n a_k^2$. Cas : $\lambda \neq 0$. La matrice M annule un polynôme scindé simple, elle est donc diagonalisable. Cas : $\lambda = 0$. On a $M^2 = \mathrm{O}_n$ et donc M est diagonalisable si, et seulement si, $M = \mathrm{O}_n$ ce qui revient à $(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Notons que la matrice M est symétrique mais pas nécessairement réelle, le théorème spectral ne s'applique pas. Notons aussi que la matrice M est de rang 1 et qu'il est classique d'établir que les matrices de rang 1 sont diagonalisables si, et seulement si, de trace non nulle.

Solution de 21 : Oral Centrale

Quand une matrice est donnée par un poynôme annulateur, on essaye d'exploiter celui-ci. Mais pour la première, le problème est que

$$X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1)$$

n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Qu'importe, on passe sur $\mathbb{C}$: une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est a fortiori une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Mais le polynôme n'est pas scindé simple (0 est racine double), on ne peut donc pas utiliser de diagonalisation. L'idée est plus élémentaire : sur $\mathbb{C}$, comme le polynôme caractéristique est scindé, on peut utiliser la relation

$$\mathrm{tr}\, M = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} m_\lambda \lambda$$

(où on désigne comme d'habitude par m_λ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique). De plus, les valeurs propres de M sont dans $\{1, j, j^2, 0\}$ puisqu'elles sont toutes racines du polynôme annulateur $X^5 - X^2$. On a donc

$$m_1 + m_j j + m_{j^2} j^2 + m_0 0 = n$$

avec $n = m_1 + m_j + m_{j^2} + m_0$, donc, par inégalité triangulaire :

$$n = |m_1 + m_j j + m_{j^2} j^2 + m_0 0| \leqslant m_1 + m_j + m_{j^2} \leqslant n$$

Toutes ces inégalités sont donc des égalités. On en déduit en premier lieu que $m_0 = 0$. Ce qui fait que 0 n'est pas valeur propre de M. Ce qui fait que M est inversible, et que M^2 aussi, et donc que $X^3 - 1$ annule M, et donc que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On a aussi égalité dans une inégalité triangulaire, ce qui équivaut au fait que tous les nombres complexes figurant dans cette inégalité sont nuls ou de même argument. Et cet argument est nécessairement l'argument de leur somme, qui vaut n. Comme j et j^2 n'ont pas pour argument 0, on en déduit que 1 est la seule valeur propre. Et comme M est diagonalisable,

$$\boxed{M = I_n}$$

Solution de 22 :

(a) Posons $N = -A^{-1}BA$. On a

$$N^p = (-1)^p A^{-1} B^p A = \mathrm{O}_n$$

donc

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - N^p = (\mathrm{I} - N)\left(\mathrm{I} + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}\right)$$

On en déduit que $\mathrm{I} - N = \mathrm{I}_n + A^{-1}BA$ est inversible et

$$\left(\mathrm{I}_n + A^{-1}BA\right)^{-1} = \mathrm{I} + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}.$$

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0)=0$. On a
$$P(X)=aX+bX^2+\ldots$$
Donc
$$P(B)=aB+bB^2+\cdots$$
puis
$$P(B)^p=a^pB^p+b'B^{p+1}+\cdots=\mathrm{O}_n.$$
On peut alors reprendre le raisonnement de la question précédente et affirmer que la matrice $\mathrm{I}_n+P(B)$ est inversible et que son inverse est de la forme
$$I_n-P(B)+P(B)^2+\cdots+(-1)^pP(B)^p.$$
On en déduit que H est inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et que l'inverse d'un élément de H est encore dans H. Il est immédiat de vérifier que H est non vide et stable par produit. On en déduit que H est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\times)$. Enfin, on vérifie que H est commutatif car les polynômes en une matrice commutent entre eux.

4. Réduction par blocs

Solution de 23 :

C'est de la réduction par convolution : on diagonalise par les méthodes habituelles $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ par exemple.

On remarque alors que $M=QM'Q^{-1}$ où $Q=\begin{pmatrix}-I_n&-I_n\\2I_n&I_n\end{pmatrix}$ et $Q^{-1}=\begin{pmatrix}I_n&I_n\\-2I_n&-I_n\end{pmatrix}$ car le produit par blocs de ces deux matrices donne bien I_{2n}.

Enfin, si B diagonalisable s'écrit $B=RD'R^{-1}$ avec D' diagonale, on remarque que $M'=\begin{pmatrix}R&0\\0&R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D'&0\\0&2D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R^{-1}&0\\0&R^{-1}\end{pmatrix}$ ce qui rend bien M' donc M diagonalisable.

Solution de 24 :

1. Si M est diago(resp. trigo)nalisable, M est annulé par un polynôme scindé (resp. scindé simple), qui annule aussi A et B par matrice diagonale par bloc, donc A et B le sont.
   Si A et B sont diago(resp. trigo)nalisable, on a P,Q inversibles et D,D' diagonales (resp. T,T' triangulaires) telles que $A=PDP^{-1}$ et $B=QD'Q^{-1}$ (resp. $A=PTP^{-1}$ et $B=QT'Q^{-1}$).
   Alors $M=\begin{pmatrix}P&0\\0&Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D&0\\0&D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\0&Q^{-1}\end{pmatrix}$ (resp. $M=\begin{pmatrix}P&0\\0&Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T&0\\0&T'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\0&Q^{-1}\end{pmatrix}$), les matrices extrêmes étant inverses l'une de l'autre, la matrice interne étant diagonale (resp. triangulaire).
2. **Première méthode, avec le polynôme minimal** : Soient π_A et π_B les polynômes minimaux de A et de B. Il serait commode que $\pi_A\pi_B$ annule N car il est scindé à racines simples. Le calcul de $(\pi_A\pi_B)(N)$ donne une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0&(*)\\0&0\end{pmatrix}$. Une meilleure idée est de remarquer que
   $$(\pi_A\pi_B)(N)=\pi_A(N)\pi_B(N)=\begin{pmatrix}0&(*)\\0&(*)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(*)&(*)\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
   (Attention, cela ne fonctionne pas avec $\pi_B(N)\pi_A(N)$!)
   Ainsi, N est diagonalisable. (Et on a même, dans ce cas là, que $\pi_N=\pi_A\pi_B$ car π_N annule A et B donc est divisible par π_A et π_B qui sont premiers entre eux, donc par $\pi_A\pi_B$, et le calcul précédent dit qu'il divise $\pi_A\pi_B$. On conclut en remarquant que les deux polynômes sont unitaires.)
   Autre méthode, directement (qui a la vertu de préciser les sous-espaces propres) : comme $\chi_N=\chi_A\chi_B$, $\mathrm{Sp}\,N=\mathrm{Sp}\,A\sqcup\mathrm{Sp}\,B$.
   Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}\,A$ (donc $\lambda\notin\mathrm{Sp}\,B$), $N\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases}AX_1+CX_2=\lambda X_1\\BX_2=\lambda X_2\end{cases}$ si et seulement si ($\lambda\notin\mathrm{Sp}\,B$) $\begin{cases}AX_1=\lambda X_1\\X_2=\mathrm{O}_{q,1}\end{cases}$
   Donc $E_\lambda(N)=\left\{\begin{pmatrix}X_1\\0\end{pmatrix},\ X_1\in E_\lambda(A)\right\}$ qui a comme dimension $\dim E_\lambda(A)$ (soit via un isomorphisme, soit en exhibant une base, ce n'est pas difficile.)

Puis si $\mu \in \operatorname{Sp} B$ (donc $\mu \notin \operatorname{Sp} A$), $N\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases} AX_1 + CX_2 = \mu X_1 \\ BX_2 = \mu X_2 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} X^2 \in E_\mu(B) \\ X_1 = M_\mu X_2 \end{cases}$ où $M_\mu = (\mu I_p - A)^{-1} C$ est bien défini ($\mu \notin \operatorname{Sp} A$).

Donc $E_\mu(N) = \left\{ \begin{pmatrix} M_\mu X_2 \\ X_2 \end{pmatrix},\ X_2 \in E_\mu(B) \right\}$ de dimension $\dim E_\mu(B)$ car

$$X_2 \in E_\mu(B) \mapsto \begin{pmatrix} M_\mu X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} \in E_\mu(N)$$

est un isomorphisme.

On a alors $p + q = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim E_\lambda(A) + \sum_{\mu \in \operatorname{Sp} B} \dim E_\mu(B) = \sum_{\rho \in \operatorname{Sp} N} \dim E_\rho(N)$ et N est diagonalisable.

Enfin, comme $\chi_N = \chi_A \chi_B = \chi_M$, N a les mêmes valeurs propres que M avec même multiplicité, les deux étant diagonalisables : elles sont semblables.

Solution de 25 :

Méthode 1 : polynômes

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule, par blocs :

$$M^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Donc, si M est diagonalisable, M^2 l'est, donc A l'est (voir exercice sur la « réduction par blocs »). Réciproquement, si A est diagonalisable, M^2 l'est (voir le même exercice). Et il existe donc un polynôme scindé à racines simples tel que $P(M^2) = (0)$. Le polynôme $P(X^2)$ annule alors M. Est-il scindé simple ? on peut écrire

$$P\left(X^2\right) = \prod_{i=1}^{d} \left(X^2 - \mu_i\right)$$

où les μ_i sont deux-à-deux distincts. Supposons dorénavant que le corps de base est $\mathbb{C}$. Si les μ_i sont non nuls, chaque $(X^2 - \mu_i)$ se factorise en

$$X^2 - \mu_i = (X - \alpha_i)(X + \alpha_i)$$

où $\pm\alpha_i$ sont les racines carrées de μ_i. On voit alors que $P(X^2)$ est scindé simple.

Conclusion partielle : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est si A est diagonalisable inversible, M est diagonalisable.

(en effet, on peut alors supposer tous les μ_i non nuls ; si un μ_i est nul, on peut enlever le terme X correspondant du polynôme annulateur P, car M^2 est inversible).

Et si A est diagonalisable mais non inversible ? On résout alors $MX = 0$ et $M^2 X = 0$ en écrivant par blocs

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

(X_1 et X_2 étant deux colonnes de même « hauteur »). On voit que les dimensions des noyaux de M et de M^2 sont différentes. Or si M est diagonalisable, elle est semblable à une matrice D diagonale, M^2 est semblable à D^2, il y a autant de coefficients non nuls sur la diagonale de D que sur celle de D^2, donc les noyaux de M et de M^2 ont même dimension. Finalement,

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible

Méthode 2

L'avantage de cette deuxième méthode est de ne pas faire d'hypothèse sur le corps de base !

On résout $MX = \lambda X$ par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X_2 & = & \lambda X_1 \\ AX_1 & = & \lambda X_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X_2 & = & \lambda X_1 \\ AX_1 & = & \lambda^2 X_1 \end{cases}$$

On voit que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A, et les dimensions des sous-espaces propres sont les mêmes (l'application

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $E_{\lambda^2}(A)$ dans $E_\lambda(M)$). En utilisant la caractérisation de la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres, on en déduit

M est diagonalisable si et seulement si A l'est et toutes les valeurs propres de A ont deux racines carrées distinctes.

Pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on retrouve le résultat précédent (heureusement !). Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ par exemple, M est diagonalisable si et seulement si A l'est et $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathbb{R}_*^+$.

Solution de 26 :

1. On vérifie que $B^m=\begin{pmatrix}A^m & mA^m\\ 0 & A^m\end{pmatrix}$ par récurrence (en réalité, la preuve est nécessaire pour le seul bloc haut droite).
2. Soit $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k\in\mathbb{C}[X]$.
   $$P(B)=\begin{pmatrix}P(A) & \sum_{k=\cancel{0}1}^{p}ka_kA^k\\ 0 & P(A)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P(A) & AP'(A)\\ 0 & P(A)\end{pmatrix}.$$
3. Si B est diagonalisable, B est annulée par un polynôme scindé à racines simples donc A aussi vu la question précédente.
4. Si $A=0$, $B=0_{2n}$ est bien diagonalisable.
   Réciproquement, si B est diagonalisable, d'après la question précédente, A l'est.
   On veut montrer que 0 est sa seule valeur propre.
   Soit P scindé à racines simples annulant B alors P et XP' annulent A. Comme P est scindé et que ses racines sont simples $P\wedge P'=1$. Si, de plus, 0 n'est pas racine de P, alors $P\wedge XP'=1$.
   On a donc $U,V\in\mathbb{K}[X]$ tels que $UP+VXP'=1$ et en évaluant en A, $\mathrm{O}_n=I_n$ ce qui est contradictoire.
   Donc 0 racine de tout polynôme annulateur de B (donc valeur propre de B, en prenant par exemple le polynôme caractéristique, ou le polynôme minimal).
   Mais alors avec un polynôme annulateur scindé simple, on a cette fois $P\wedge XP'=X$ et $U,V\in\mathbb{K}[X]$ tels que $UP+XVP'=X$ et en évaluant en A, $\boxed{A=0.}$