Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

Solution de 2 :

1. Par opérations élémentaires, M est équivalente à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$: $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(B-A)$ en s'intéressant aux endomorphismes induits ou en échelonnant les blocs diagonaux ou en utilisant des matrices J_r.
2. Résoudre $M\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ avec A et $B-A$ inversibles.

Solution de 16 :

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, alors $X_{n+1} = AX_n$ donc pour tout n, $X_n = A^n X_0$.

Or $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$ et donc $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} & 2+(-1)^{n+1} \\ 2+(-1)^{n+1} & 2^n+2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} \\ 2+(-1)^{n+1} & 2+(-1)^{n+1} & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}$.

D'où x_n, y_n, z_n exprimés en fonction de x_0, y_0, z_0.

On peut même calculer le résultat sans calculer P^{-1} !

Si on pose $Y_n = P^{-1}X_n$, $Y_{n+1} = DY_n$ donc $Y_n = D^n Y_0$ et donc $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n(\lambda+\mu)+2^n\nu \\ (-1)^{n+1}\lambda+2^n\mu \\ (-1)^{n+1}\mu+2^n\nu \end{pmatrix}$.

Solution de 19 :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\mathscr{C}(D) = \left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},\ a,b,c,d,i \in \mathbb{R}\right\}$.

$N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ racine de D ssi $\begin{pmatrix} a^2+bd & b(a+e) & 0 \\ d(a+e) & e^2+bd & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = D$

Mais si on a $a+e \neq 0$, alors $b = d = 0$ et $a^2 = -1$ ce qui n'est pas possible sur $\mathbb{R}$.

Donc N racine de D si et seulement si $e = -a$, $a^2 + bd = -1$ et $j^2 = 2$.

$\mathscr{R}(A) = \left\{P\begin{pmatrix} s\sqrt{-1-bd} & b & 0 \\ d & -s\sqrt{-1-bd} & 0 \\ 0 & 0 & t\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1};\ b,d \in \mathbb{R};\ bd \leqslant -1; s,t \in \{-1,1\}\right\}$.

2. Éléments propres et diagonalisation

3. Réduction par blocs

Solution de 35 :

On résout $MX = \lambda X$ par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X_2 &= \lambda X_1 \\ AX_1 &= \lambda X_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X_2 &= \lambda X_1 \\ AX_1 &= \lambda^2 X_1 \end{cases}$$

On voit que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A, et les dimensions des sous-espaces propres sont les mêmes (l'application

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $E_{\lambda^2}(A)$ dans $E_\lambda(M)$). En utilisant la caractérisation de la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres, on en déduit

M est diagonalisable si et seulement si A l'est et toutes les valeurs propres de A ont deux racines carrées distinctes.

Pour $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible. Pour $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ par exemple, M est diagonalisable si et seulement si A l'est et $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathbf{R}_*^+$.

Solution de 36 :

1. Si A et B sont diagonalisable, on a P,Q inversibles et D,D' diagonales telles que $A=PDP^{-1}$ et $B=QD'Q^{-1}$.
   Alors $M=\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}$ les matrices extrêmes étant inverses l'une de l'autre, la matrice interne étant diagonale.
2. Comme $\chi_N=\chi_A\chi_B$, $\mathrm{Sp}\,N=\mathrm{Sp}\,A\sqcup\mathrm{Sp}\,B$.
   Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}\,A$ (donc $\lambda\notin\mathrm{Sp}\,B$), $N\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases}AX_1+CX_2=\lambda X_1\\ BX_2=\lambda X_2\end{cases}$ si et seulement si ($\lambda\notin\mathrm{Sp}\,B$) $\begin{cases}AX_1=\lambda X_1\\ X_2=0_{q,1}\end{cases}$
   Donc $E_\lambda(N)=\left\{\begin{pmatrix}X_1\\0\end{pmatrix},\ X_1\in E_\lambda(A)\right\}$ qui a comme dimension $\dim E_\lambda(A)$ (soit via un isomorphisme, soit en exhibant une base, ce n'est pas difficile.)
   Puis si $\mu\in\mathrm{Sp}\,B$ (donc $\mu\notin\mathrm{Sp}\,A$), $N\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases}AX_1+CX_2=\mu X_1\\ BX_2=\mu X_2\end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases}X^2\in E_\mu(B)\\ X_1=M_\mu X_2\end{cases}$ où $M_\mu=(\mu I_p-A)^{-1}C$ est bien défini ($\mu\notin\mathrm{Sp}\,A$).
   Donc $E_\mu(N)=\left\{\begin{pmatrix}M_\mu X_2\\X_2\end{pmatrix},\ X_2\in E_\mu(B)\right\}$ de dimension $\dim E_\mu(B)$ car
   $$X_2\in E_\mu(B)\mapsto\begin{pmatrix}M_\mu X_2\\X_2\end{pmatrix}\in E_\mu(N)$$
   est un isomorphisme.
   On a alors $p+q=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,A}\dim E_\lambda(A)+\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}\,B}\dim E_\mu(B)=\sum_{\rho\in\mathrm{Sp}\,N}\dim E_\rho(N)$ et N est diagonalisable.
   Enfin, comme $\chi_N=\chi_A\chi_B=\chi_M$, N a les mêmes valeurs propres que M avec même multiplicité, les deux étant diagonalisables : elles sont semblables.