RÉDUCTION 1 : DIAGONALISATION

- Méthodes générales :
  - Regarder ce qui se passe en petite dimension (2 ou 3) permet parfois d'éclairer les choses.
  - Pour les endomorphismes, une base bien adaptée au problème permet de le transformer en un problème simple. C'est le cas aussi si l'espace se décompose en somme directe de sous-espaces simples.
- Détermination des éléments propres :
  - Le polynôme caractéristique sert à déterminer les valeurs propres : il faut donc en donner une forme la plus factorisée possible. Si l'on calcule celui-ci par une méthode du pivot de Gauss en travaillant sur le
  - Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX=\lambda X$ où $A=\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.
- Diagonalisabilité :
  - Avoir n valeurs propres distinctes en dimension n suffit.
  - On peut ajouter les dimensions des sous-espaces propres (multiplicités géométriques) et comparer à la dimension de l'espace.
  - Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, il y a diagonalisabilité si et seulement si les dimensions de chaque sous-espace propre sont égales aux multiplicités des valeurs propres.
  - On verra plus tard qu'une matrice symétrique **réelle** est automatiquement diagonalisable.
  - Savoir diagonaliser complètement en petite dimension, et savoir en déduire puissance de matrice, terme général de suites récurrentes, commutant.
- Comme les sous-espaces propres sont toujours en somme directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre. Pratique !

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Montrer que tout projection peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

2 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le rang de $M=\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.
2. Calculer l'inverse de M lorsque c'est possible.

3 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\}$. Montrer que H est stable par u.
2. Soit $x=(3,2,1)$ et $D=\mathrm{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u.
3. Justifier que $\mathbb{R}^3=D\oplus H$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de u est diagonale par blocs, à cœfficients entiers.

4 Montrer $(x\mapsto e^{\lambda x})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ et $(x\mapsto\cos(\lambda x))_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ sont des familles libres.

5 **CCINP 83 : Valeur propre de composée**

6 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et $A^\intercal$ ont même polynôme caractéristique.

7 Montrer qu'en dimension impaire, un matrice réelle a toujours au moins une valeur propre réelle.

8 **CCINP 72 : Endomorphismes de rang 0 ou 1**

9 Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?

10 Diagonaliser $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

11 **CCINP 67 : Diagonalisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$**

12 **CCINP 59 : Endomorphisme de polynômes**

13 **CCINP 69 : Rang et diagonalisabilité**

14 **CCINP 70 : Réduction de matrice circulante**

15 **Matrices compagnes** Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne $(a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{K})$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé simple.

16 Trouver le terme général des suites x, y, z telles que pour tout n, $\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$

17 Trouver le commutant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18 **CCINP 73 : Commutant d'une matrice 2×2**

19 Trouver les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

20 Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$ en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

2. Éléments propres et diagonalisation

21

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2 - 7a & a - 7 & a \end{pmatrix}$ admet-elle une valeur propre double ? Pour ces valeurs, A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

22 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le terme général des suites x, y, z définies par $x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$

23 Quelles sont les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables ?

24 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

25 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul x soit un vecteur propre. Que dire de u ?

26 Déterminer le commutant et les racines carrées de la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 10 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

27 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $A^\intercal$ l'est.

28 Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

29 On souhaite démontrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat si on suppose de plus que $A \in \mathcal{GL}(\mathbb{K})$.
2. En déduire le résultat si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en utilisant l'exercice suivant.
3. Retrouver le résultat dans le cas général en calculant le produit dans les deux sens de $\begin{pmatrix} A & XI_n \\ I_n & (0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -B & XI_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$.

30 **Densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$** Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$ suffisamment proche de 0, $A - \lambda I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ au sens où $A^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$ lorsque pour tout (i,j), $a_{i,j}^{(k)} \to a_{i,j}$.

Retrouver le résultat en exploitant le fait que tout matrice de rang r est équivalente à J_r.

31 **Matrices circulantes** Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.
2. En déduire la déterminant dit circulant $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

32 Matrices de rang 1

1. Montrer que $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $XY^\intercal$ où X, Y sont des colonnes non nulles de taille à déterminer. Comment s'exprime sa trace en fonction de X et Y ?
2. On suppose que $p = q$. Donner, suivant les valeurs de sa trace, les valeurs propres de A. Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

33 Théorème de Gerschgorin

En utilisant le résultat d'inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante ($\forall\, i,\ \ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$) ou le principe de sa démonstration, montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, chaque valeur propre complexe de A se trouve dans un disque de Gerschgorin de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Donner pour chaque valeur propre un disque de centre 0 dans lequel elle se trouve.

3. Réduction par blocs

34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

35

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

36

Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisablesi A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

   On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune.
   Montrer que N est diagonalisable et semblable à M. Préciser les sous-espaces propres de N.