

STRUCTURE DE GROUPE

- Il faut connaître la définition d'un groupe mais on ne s'en sert directement que rarement.
- La plupart du temps, pour montrer qu'on a un groupe, on montre plutôt que c'est un sous-groupe d'un groupe connu, en reconnaissant une partie d'un groupe connu et
 - * en utilisant la caractérisation d'un sous-groupe, c'est ce qui sert le plus dans la pratique,
 - * en faisant apparaître l'ensemble comme image directe ou réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe,
 - * en voyant l'ensemble comme image d'un groupe par une bijection vérifiant la propriété des morphismes de groupes.

1. Vrai ou faux

1. $(\mathbb{N}, +)$ est un groupe abélien.
2. $(\mathbb{R}, \times)$ est un groupe abélien.
3. Si H sous-groupe de G , alors l'élément neutre de G est aussi celui de H .
4. La réunion d'une famille de sous-groupes de G est un sous-groupe de G .
5. Si $(G, \star)$ groupe, $a, b, c \in G$, $a \star b = a \star c \iff b = c$.
6. Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.
7. Dans un groupe fini, tout élément est d'ordre fini.

2. Exercices traités en cours

1

Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E = \mathcal{F}(E, F)$. Montrer que

1. f est injective si et seulement s'il existe $g \in E^F$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$.
2. f est surjective si et seulement s'il existe $h \in E^F$ telle que $f \circ h = \text{id}_F$.

2

Soit $(G, \star)$ un groupe, H, K sont des sous-groupes de $(G, \star)$. Montrer que

$$H \cup K \text{ sous-groupe de } G \iff H \subset K \text{ ou } K \subset H.$$

3

Théorème de Lagrange

Soit $(G, \star)$ un groupe d'ordre (c'est-à-dire de cardinal) fini, H un sous-groupe de G .

1. Montrer que la relation définie par $x \mathcal{R} y \iff x^{-1} \star y \in H$ est une relation d'équivalence sur G .
2. Vérifier que les classes d'équivalence ont toutes le même cardinal.
3. Démontrer le théorème de Lagrange : $|H|$ divise $|G|$.

4

Centre de $\mathfrak{S}_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et (i, j) commutent, $\{i, j\}$ est stable par σ . La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ le centre de $\mathfrak{S}_n$, partie de $\mathfrak{S}_n$ des permutations commutant avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n) = \{\text{id}_{[1, n]}\}$. Étudier le cas où $n = 2$.

5

Conjugaison de cycle Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et c un cycle, décrire $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

6

Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et si p est le nombre d'orbites de σ , alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$.

3. Structure de groupe

7

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\star$ associative.

Montrer que l'ensemble des éléments réguliers à gauche, c'est-à-dire $x \in E$ tels que

$$\forall a, b \in E, \quad x \star a = x \star b \Rightarrow a = b$$

(respectivement réguliers à droite) est stable pour $\star$.

8

Soit $G =]-1, 1[$ et pour $(x, y) \in G^2$, $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$.

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

9

Soit G un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Soient H un sous-groupe strict de G , $a \in G \setminus H$. Montrer que $H \cup aH$ est un sous-groupe de G .
3. Si G est fini, en créant par récurrence une suite de sous-groupe de G de cardinal une puissance de 2, montrer que le cardinal de G est une puissance de 2.

10

Transport de structure

Soient G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$, $(H, \times)$ un groupe et f une application surjective de H vers G telle que

$$\forall x, y \in H, \quad f(x \times y) = f(x) \star f(y).$$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe, et que si f est bijective, $(G, \star)$ isomorphe à $(H, \times)$.

Applications :

- Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$, avec $a \star b = \sqrt[2025]{a^{2025} + b^{2025}}$
- Montrer que $(]-1, 1[, \Delta)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ avec $a \Delta b = \frac{a+b}{1+ab}$ (Utiliser th).

11 Centre d'un groupe

Soit G un groupe. On appelle *centre* de G , noté $Z(G)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe commutatif de G .

12 Soit $(G, \star)$ un groupe commutatif de neutre e . On pose $T(G) = \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = e\}$. Montrer que $T(G)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

13 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $G = \{M(x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe. Est-il abélien ?

14 Soit G un ensemble et $\star$ une loi de composition interne associative sur G telle qu'il existe $e \in G$ tel que

- $\forall x \in G, x \star e = x$
- $\forall x \in G, \exists x' \in G, x \star x' = e$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.

15 Soit $(G, \times)$ un groupe, $a \in G$ et H un sous-groupe de $(G, \times)$.

On note $aHa^{-1} = \{aha^{-1}, h \in H\}$. Montrer que aHa^{-1} est un sous-groupe de $(G, \times)$.

16 Automorphismes intérieurs

Soit $(G, \star)$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on note $\varphi_a : \begin{cases} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto a \star x \star a^{-1} \end{cases}$

1. Soit $a \in G$. Montrer que φ_a est un automorphisme du groupe $(G, \star)$.
2. On note $\text{Int}(G) = \{\varphi_a, a \in G\}$. Montrer que $(\text{Int}(G), \circ)$ est un groupe.

17 Sous-groupes distingués

Soit $(G, \times)$ un groupe. On dit qu'un sous-groupe H de $(G, \times)$ est distingué si

$$\forall (a, h) \in G \times H, a \times h \times a^{-1} \in H.$$

1. Soit f un morphisme du groupe $(G, \times)$ vers un groupe $(G', \star)$. Montrer que $\text{Ker } f$ est un sous-groupe distingué de $(G, \times)$.
2. Soit H un sous-groupe distingué de $(G, \times)$ et K un sous-groupe de $(G, \times)$.
On note $HK = \{x \times y, x \in H, y \in K\}$.
Montrer que HK est un sous-groupe de $(G, \times)$.

18

1. Vérifier que $\frac{1}{3}\mathbb{Z} + \frac{2}{5}\mathbb{Z}$ est un sous-groupe monogène de $(\mathbb{Q}, +)$.
2. Déterminer le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.

19 Quels sont les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$?

20 Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini d'un groupe abélien en est un sous-groupe.

21 Soit G un groupe et $x \in G$ d'ordre n . Quel est l'ordre de x^2 ?

22 Soit G un groupe non réduit à un élément. On suppose que G n'admet que deux sous-groupes : $\{e\}$ et G lui-même. On souhaite démontrer que G est fini et que son cardinal est un nombre premier.

1. Soit $g \in G$ tel que $g \neq e$. Démontrer que g engendre G .
2. Démontrer que g est d'ordre fini.
3. Démontrer que g est d'ordre premier.
4. Conclure.

23 Soit G un groupe admettant un nombre fini de sous-groupes.

1. Démontrer que tout élément de G est d'ordre fini.
2. En déduire que G est fini.

24 Soit $(G, \cdot)$ un groupe de cardinal $2n$.

1. Justifier que l'on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur G en posant

$$x \mathcal{R} y \iff x = y \quad \text{ou} \quad x = y^{-1}.$$

2. En déduire l'existence dans G d'un élément d'ordre 2.

25 On souhaite montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est lui-même cyclique. Soit $(G, \cdot)$ un groupe cyclique de générateur a et H un sous-groupe de $(G, \cdot)$.

1. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel non nul n tel que $a^n \in H$.
2. Établir que H est alors le sous-groupe engendré par a^n .

- 26** Soit $(G, \cdot)$ un groupe cyclique à $n \geq 2$ éléments engendré par a .
 Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'application $f : G \rightarrow G$ définie par $f(x) = x^r$ pour tout $x \in G$.
 Enfin, on pose $d = n \wedge r$.
- Vérifier que f est un morphisme du groupe $(G, \cdot)$ vers lui-même.
 - Déterminer le noyau de f .
 - Montrer que l'image de f est le sous-groupe de $(G, \cdot)$ engendré par a^d .
 - Pour $y \in G$, combien l'équation $x^r = y$ possède-t-elle de solutions ?

4. Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

- 27** Soient $a, n \in \mathbb{N}$. On considère $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \bar{k} & \longmapsto & a\bar{k} \end{matrix}$.
- Montrer que φ est un endomorphisme et déterminer son noyau.
- 28** Établir que tout groupe fini dont le cardinal est un nombre premier p est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$.
- 29** Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- 30** Soit $n \geq 1$ et G un groupe. Soit $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$ un morphisme de groupes.
- Démontrer que f est complètement caractérisé par $f(\bar{1})$.
 - Existe-t-il des éléments d'ordre 3 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? En déduire les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
 - On suppose maintenant que f est un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Quels sont les ordres possibles de $f(\bar{1})$? En déduire tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

- 31** Les groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sont-ils isomorphes ?

- 32** Parmi les groupes suivants, lesquels sont isomorphes ?

- | | | |
|---|---|--------------------------------|
| (a) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ | (d) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ | (g) $(\mathbb{Q}, +)$ |
| (b) $(\mathbb{U}_4, \times)$ | (e) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ | (h) $(\mathbb{Q}^*, \times)$ |
| (c) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ | (f) $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ | (i) $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ |

- 33** Déterminer les morphismes de groupes entre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

- 34** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour chaque $a \in \mathbb{Z}$, l'ordre de $\bar{a}$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

- 35** Soit un entier $n \geq 2$. Combien le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ admet-il de sous-groupes ?

- 36** Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si $a \wedge b = 1$.

5. Le groupe symétrique

- 37** Déterminer la signature de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer une expression de σ comme produit de transpositions.

- 38** Déterminer l'ordre d'une composée de deux permutations à supports disjoints.

- 39** Décomposer en produit de cycles disjoints la permutation de $\mathfrak{S}_7$

$$\sigma = (1 \ 3 \ 7 \ 2) \circ (4 \ 5 \ 1) \circ (6 \ 1 \ 5 \ 3 \ 7) \circ (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 2).$$

Calculer de plusieurs manières sa signature. Calculer σ^{2025} .

40 Familles génératrices de $\mathfrak{S}_n$

Soit $n \geq 2$. On dit qu'une famille d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ en est une famille génératrice si toute permutation s'écrit comme composée d'éléments de la famille ou de leurs inverses.

- Montrer que les $n - 1$ transpositions $\tau_i = (i \ i + 1)$, où $1 \leq i \leq n - 1$, forment une famille génératrice de $\mathfrak{S}_n$.
- Montrer que les transpositions dites simples $\tau'_i = (i \ i - 1)$ où $2 \leq i \leq n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

41 Le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$

Soit $n \geq 3$. On note $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$.

- Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ de cardinal $\frac{n!}{2}$.
- (On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent...)
 - Montrer que les 3-cycles de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{A}_n$.
 - Montrer plus précisément que les $(1 \ 2 \ i)$ pour $i \in \llbracket 3, n \rrbracket$ engendrent $\mathfrak{A}_n$.