

1. Suites de fonctions

Solution de 5 : Ex CCINP 13 : convergence uniforme et fonctions bornées

1. Écrivons la définition de la convergence uniforme avec $\varepsilon = 1$: on a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall x \in X, |g(x) - g_N(x)| \leq |g_N(x) - g(x)| \leq 1$.

En particulier, pour tout $x \in X, |g(x)| \leq |g_N(x)| + 1$. Comme g_N est bornée, $|g_N|$ est majorée, ce qui permet de conclure.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc on a un rang N à partir duquel $\frac{1}{n} < |x|$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{x}$, donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$.

On en déduit que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est bornée car $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq n^2$. Or f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la question précédente, (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution de 8 :

1. $f : x \mapsto x^p$ (traiter le cas $x = 0$ à part)
2. Faire l'étude de la fonction $|f_p - f|$.
3. Utiliser le théorème de limite d'intégrales sur un segment par convergence uniforme.

Solution de 9 :

Quantité conjuguée.

2. Séries de fonctions

A. Exercices vus en cours

Solution de 20 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet²

1. $]1, +\infty[$ par critère de convergence des séries de Riemann.
2. $[a, +\infty[$ où $a > 1$.
3. $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{\ln^k(n)}{n^x}$. CN sur tout $[a, +\infty[$. D'où la classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln^k(n)}{n^x}$.
4. ζ est décroissante par passage à la limite car toutes les f_n le sont, donc les sommes partielles le sont aussi ou par négativité de ζ' .
5. 1 par double limite.
6. 1re solution : comparer à une intégrale, cf question suivante.
2e solution : on a envie de comparer ζ près de 1 à la série harmonique.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme ζ est décroissante, elle a une limite ℓ finie ou $+\infty$ en 1.
Or on a $\ell \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, donc $\ell \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \rightarrow +\infty$. Ainsi $\ell = +\infty$.
Ou encore $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq A$ à partir d'un rang N .
Pour $n = N$, on a V voisinage de 1 tel que sur V , $\zeta(x) \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^x} \geq A$. Donc ζ tend vers $+\infty$ en 1.
7. On trouve $\zeta \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.
8. ζ est décroissante avec une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
9. CS sur $\mathbb{R}_*^+$ par TSSA.
CN sur $[a, +\infty[$, $a > 1$.
CU sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ par majoration du reste TSSA.
10. TSSA apcr : CU sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ de toutes les dérivées.
11. Simplifier $\eta(x) + \zeta(x)$.

B. Exercices CCINP

Solution de 26 : CCINP 18 (modifié) : Convergence et continuité d'une série de fonctions

1. Si $|x| < 1$, il y a convergence absolue car $\frac{|x|^n}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Si $|x| > 1$, il y a divergence grossière car $\frac{|x|^n}{n} \rightarrow +\infty$.
Si $x = -1$, la série harmonique diverge, si $x = 1$, la série harmonique alternée converge (par exemple par le TSSA).
Finalement, la série de fonctions converge simplement sur $D =]-1, 1]$.

2. (a) $\|u_n\|_{\infty,]-1,1]} = \frac{1}{n}$ donc il n'y a pas de convergence normale sur $D =]-1,1]$.

Comme $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} \frac{1}{n}$ qui est un terme général de série divergente, le théorème de la double limite ne s'applique pas et donc il n'y a pas de convergence uniforme sur $D =]-1,1]$.

(b) Par contre, sur tout intervalle de la forme $]-a, a[$ où $0 < a < 1$, $\|u_n\|_{\infty,]-1,1]} = \frac{a^n}{n} = |u_n(a)|$ qui est un terme général de série convergente, donc il y a convergence normale sur $]-a, a[$. On a donc aussi convergence uniforme sur ce type d'intervalle.

Reste à savoir s'il y a convergence uniforme au voisinage de 1.

Or, le théorème spécial s'appliquant pour $x \in [0, 1]$, la majoration du reste donne

$$\forall x \in [0, 1], |R_{n+1}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

qui ne dépend pas de x et tend vers 0.

Il y a donc bien convergence uniforme sur $[0, 1]$.

(c) Comme

H1 les u_n sont toutes continues sur $]-1, 1]$ et comme, d'après la question précédente,

H2 $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de tout point de $D =]-1, 1]$,

S est continue sur D .

C. Autres exercices

Solution de 29 :

Il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$, donc uniforme, les fonctions $x \mapsto 1/(n^4 + n^2 x^2)$ sont continues, donc f l'est (sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Solution de 30 :

Il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$, donc uniforme, les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$ sont continues, donc f l'est (sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Solution de 31 :

La convergence simple se règle facilement, en disant par exemple que pour n'importe quel $x > 0$,

$$\exp(-n^2 x) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

(par croissances comparées). On majore facilement $|f_n|$ par 1 sur $\mathbb{R}_*$, et c'est le plus petit majorant possible, car $\lim_0 f_n = 1$. Il n'y a donc pas convergence normale, vu que $\|f_n\|_{\infty} = 1$. Il y a en revanche convergence normale sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$ (car $\|f_n\|_{[a, +\infty[} = \exp(-n^2 a)$). Il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$, sinon la suite (f_n) convergerait uniformément vers 0, ce qui n'est pas le cas.

La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, où l'on a fixé un $a > 0$ arbitraire, permet néanmoins d'utiliser le théorème de la double limite, et de trouver, en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, que $\lim_{+\infty} S = 1$.

Pour un développement asymptotique, la stratégie est souvent d'utiliser des comparaisons série-intégrale après avoir éventuellement mis de côté certains termes. Ici, une majoration simple

permet d'éviter le recours un peu plus long à la comparaison série-intégrale : pour tout $x > 0$, $S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + R(x)$ où

$$0 \leq R(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-k^2 x} \leq \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-3x}}{1 - e^{-x}}$$

ce qui donne facilement

$$S(x) = 1 + e^{-x} + o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-2x})$$

Solution de 32 :

La convergence simple est conséquence du théorème spécial sur les séries alternées. Puis la majoration du reste dans ce même théorème permet d'écrire pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$, avec des notations habituelles,

$$|R_n(x)| \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n+2}\right)$$

Ce qui permet facilement d'avoir la convergence uniforme sur tout segment.

Les fonctions $x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$ étant continues, la somme l'est.

Solution de 33 : Oral des Mines

1. La convergence simple se traite en distinguant le cas $t = 0$. Mais sans difficulté. f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. f est impaire.

3. Dérivons $f_n : t \mapsto \frac{2t}{t^2 + n^2}$. La dérivée a le signe de $2(t^2 + n^2) - 2t(2t) = 2(n^2 - t^2)$ et on en déduit que $|f_n|$ est maximale en $-n$ et en n . On trouve alors qu'il n'y a pas convergence normale. En revanche, il y a convergence normale, donc uniforme, sur tout segment, ce qui suffit (en n'oubliant pas de dire que les f_n sont continues) pour établir la continuité de f .

En effet, soit K un segment. Soit $M > 0$ tel que $K \subset [-M, M]$. L'étude des variations de f_n sur $[-M, M]$ montre que, si $n \geq M$, donc au moins à partir d'un certain rang,

$$\|f_n|_K\|_\infty \leq f_n(M) = \frac{2M}{M^2 + n^2}$$

Or $\sum_n f_n(M)$ converge, donc $\sum_n \|f_n|_K\|_\infty$ converge.

4. Une comparaison à une intégrale donne la limite : π .

5. Et donc la convergence n'est pas uniforme, car le théorème de la double limite donnerait une limite nulle.

Solution de 34 :

Plan de résolution : il y a convergence sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, uniforme car normale sur tout segment inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ce qui assure la transmission de la continuité.

On pourrait montrer que la limite en $+\infty$ est nulle par double limite, la limite en 0 est $+\infty$ par technique habituelle (la fonction décroît, si elle n'a pas pour limite $+\infty$ en 0 elle est majorée, on en déduit que les sommes partielles sont uniformément majorées, on peut dans une somme partielle faire tendre la variable vers 0, on en déduit que $\sum 1/n$ converge. Tout cela ne nous donne pas d'équivalent !

L'idée à avoir, dans ce genre de question (équivalent), c'est la comparaison à une intégrale. Ici, notant $S(x)$ la somme de la série de fonctions au point x , on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x^2} \leq S(x) \leq \frac{1}{1 + x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x^2}$$

où on a noté $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x^2}$ la limite pour $A \rightarrow +\infty$ de $\int_1^A \frac{dt}{t+t^2x^2}$.

Le calcul de l'intégrale se fait : on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{t+t^2x^2} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$$

Pour ne pas couper une intégrale qui existe en deux intégrales qui n'existent pas, on passe par

$$\int_1^A \frac{dt}{t+t^2x^2} = \int_1^A \frac{dt}{t} - \int_1^A \frac{x^2}{1+tx^2} dt$$

On intègre avec des $\ln$, on prend les limites quand $A \rightarrow +\infty$, et finalement on aboutit à

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \leq S(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

En $+\infty$, c'est raté, on ne peut qu'espérer qu'il y a un équivalent du type a/x^2 , avec $1 \leq a \leq 2$. Mais en revanche, en 0, l'encadrement permet de conclure :

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2\ln x$$

Alors au voisinage de $+\infty$, que fait-on ? on observe, et on se dit que n ne pèse pas lourd devant

n^2x^2 . Donc, notant $b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on espère que

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{b}{x^2}$$

Pour cela, on écrit

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, on peut lui appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$, on obtient

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où l'équivalent. Hors-programme : $b = \pi^2/6$, et on a bien $1 \leq b \leq 2$, c'est agréable.

Solution de 35 :

Il y a convergence normale sur $\mathbf{R}$, donc uniforme, les fonctions $x \mapsto 1/(n^4 + n^2x^2)$ sont continues, donc f l'est (sur $\mathbf{R}$ tout entier).

Solution de 37 :

1. Pour f , on peut utiliser le critère de d'Alembert pour l'absolue convergence :

$$\left| \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} \right| = \frac{1}{|x+n+1|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ converge absolument donc converge pour tout $x \notin \mathbb{Z}^-$.

Pour g , on est tenté d'utiliser le TSSA. C'est possible car $\left(\frac{1}{n!(x+n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir du rang $\max(0, [-x])$

(pour avoir $x+n > 0$), et, bien sûr, $\frac{1}{n!(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. On vérifie que f converge normalement sur $[1, +\infty[$: si $x \geq 0$, $\left| \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par double limite, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Pour g , on a pour $x \in [1, +\infty[$, $\left| \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \right| = \frac{1}{n!(x+n)} \leq \frac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente donc convergence normale donc uniforme sur $[1, +\infty[$ (on aurait aussi pu utiliser la majoration du reste dans le TSSA). Par double limite, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

3. On calcule

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} \\ &= x \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+m)} = x \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) = x f(x) - 1. \end{aligned}$$

Puis,

$$xg(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+n-n)}{n!(x+n)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n!} - \frac{n(-1)^n}{n!(x+n)} \right) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}$$

(licite car les deux séries convergent bien). Le terme pour $n=0$ est nul dans la deuxième (attention, pas de factorielle de nombre < 0) et on reconnaît une série exponentielle dans la première. Donc

$$xg(x) = e \cdot e^{-1} - e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1 + e \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!(x+1+m)} = 1 + g(x+1).$$

4. On obtient alors pour tout x , $f(x) - g(x) = \frac{f(x+1) - g(x+1)}{x}$ puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - g(x) = \frac{f(x+n) - g(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

avec $f(t) - g(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (c'est la convergence simple de f).

5. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre que $g(=f)$ l'est. On applique le théorème du cours : pour tout n , $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout k , $g_n^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n+k} k!}{n!(x+n)^{k+1}}$. Pour montrer la convergence uniforme, on applique le TSSA sur un segment $[a, b]$ ne contenant pas d'entiers négatifs à partir d'un certain rang : $\left(\frac{k!}{n!(x+n)^{k+1}} \right)_{n \geq N}$ avec $N = \max(0, \lceil -b \rceil)$ (pour avoir $x+n > 0$) décroît vers 0.

Alors, en notant R_n^k le reste d'ordre n , $|R_n^k| \leq \frac{k!}{(n+1)!|x+n+1|^{k+1}} \leq \frac{k!}{(n+1)!|a+n+1|^{k+1}}$ qui est indépendant de x et tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc il y a convergence uniforme de toutes les séries de dérivées et le théorème du cours s'applique.

Solution de 39 :

1. Utiliser le théorème des accroissements finis. CN sur tout segment.

2. Se ramener au voisinage de 0 et utiliser la série divergente $\sum \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$.

ou Justifier qu'une limite finie ou non existe et la minorer par une somme partielle (comme pour ζ en 1...)

Ou utiliser une écriture de f_n sous forme intégrale.
