1. Exercices vus en cours

2. Polynômes

Solution de 12 : Polynômes de Tchebychev [2]

On peut calculer directement les racines sous forme de cosinus : si $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos\theta)=0 \iff \cos n\theta=0 \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ n\theta=-\frac{\pi}{2}+k\pi \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Mais $\cos$ est injective sur $[0,\pi]$ (strictement décroissante) et

$$0\leqslant\frac{(2k-1)\pi}{2n}\leqslant\pi \iff \frac{1}{2}\leqslant k\leqslant n+\frac{1}{2} \iff k\in[\![1,n]\!].$$

Comme T_n est de degré n (par récurrence double), il a au plus n racines distinctes. On vient d'en trouver exactement n : les $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$ pour $k\in[\![1,n]\!]$. On les a toutes.

Solution de 18 :

Les racines de X^2+X+1 sont...

Réponse :

n [6]	0	1	2	3	4	5
R	$2X$	0	$-2X-2$	0	2	0

Solution de 19 :

Réponses :

- $X^4+X^2+1=\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X+1\right)$
- $(X^2-X+1)^2+1=\left(X^2+1\right)\left(X^2-2X+2\right)$

Solution de 21 : Théorème de Bézout [5] avec degrés

Unicité si $AU_1+BV_1=AU_2+BV_2$ avec $\deg U_1<\deg B$, $\deg V_1<\deg A$, $\deg U_2<\deg B$ et $\deg V_2<\deg A$, alors

$$A(U_1-U_2)=B(V_1-V_2)$$

donc A divise $B(V_1-V_2)$ et est premier avec B donc divise V_1-V_2 par le lemme de Gauß. Ce dernier étant de degré strictement inférieur à celui de A, on en déduit que $V_1=V_2$, puis enfin que $U_1=U_2$.

Existence on part d'une relation de Bézout $AU_1 + BV_1 = 1$.

Par division euclidienne, on a $Q, U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $U_1 = BQ + U$ avec $\deg U < \deg B$.

Alors $AU + B(QA + V_1) = 1$. On pose $V = QA + V_1$. Il reste à voir que $\deg V < \deg A$.

Or $AU + BV = 1$ donc $AU = 1 - BV$ avec $0 = \deg 1 < \deg BV$ car V n'est pas nul (sinon A serait constant) et B ne l'est pas non plus.

Donc $\deg AU = \deg BV$ ce qui donne finalement $\deg V = \deg A + \deg U - \deg B < \deg A$.

Solution de 22 :

Première méthode Appliquer l'algorithme d'Euclide à a et b (si $b \neq 0$).

$a = bq + r$ avec $r < b$.

Donc

$$\begin{aligned} X^a - 1 &= X^{bq+r} - 1 \\ &= \left(X^b\right)^q \cdot X^r - 1 \\ &= \left(\left(X^b\right)^q - 1 + 1\right) \cdot X^r - 1 \\ &= \left(\left(X^b\right)^q - 1^q\right) \cdot X^r + X^r - 1 \\ &= (X^b - 1) \cdot P \cdot X^r + X^r - 1 \end{aligned}$$

avec $\deg X^r - 1 = r < b = \deg X^b - 1$.

Le reste de la div. euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ est $X^r - 1$:

$$X^a - 1 \wedge X^b - 1 = X^b - 1 \wedge X^r - 1$$

Les algorithmes d'Euclide s'écrivent de la même manière pour les entiers et les polynômes.

Dernier reste non nul ?

$$X^a - 1 \wedge X^b - 1 = X^d - 1 \wedge X^0 - 1 = X^d - 1.$$

Si $b = 0$, $(X^a - 1) \wedge \left(X^b - 1\right) = (X^a - 1) \wedge 0 = X^a - 1 = X^d - 1$.

Deuxième méthode Racines complexes

Racines communes de $X^a - 1$ et $X^b - 1$? But : celles de $X^d - 1$.

- Si $z \in \mathbb{C}$ racine de $X^d - 1$ ie $z^d = 1$, alors $z^a = 1$ et $z^b = 1$. On a a', b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
  Alors $z^a = \left(z^d\right)^{a'} = 1^{a'} = 1$. et idem pour $z^b = 1$.

3. 

Étienne Bezout (Nemours 1730 - Avon 1783) Éminent mathématicien, adjoint mécanicien à l'Académie des sciences en mars 1758, il fut nommé en 1763 professeur et examinateur des gardes-marine et composa pour eux un Cours de mathématiques en 4 volumes. Membre de l'Académie de marine, il est l'auteur de nombreux ouvrages dont un Traité de navigation (1769) et une Théorie générale des équations algébriques (1779). Bézout contribua beaucoup à orienter dans un sens mathématique la formation des jeunes officiers pour les rendre aptes aux calculs astronomiques les plus savants. Un tel système, où la théorie l'emportait trop souvent sur la pratique, contrairement à ce qui se faisait en Angleterre, provoqua d'assez vives polémiques.

- Si z racine commune,
  on a $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au+bv=d$.
  $z^d = z^{au+bv} = (z^a)^u \left(z^b\right)^v = 1$.

Or toutes ces racines sont simples (connu) dans X^a-1 et X^b-1 donc dans le pgcd et aussi dans X^d-1 et tous les polynômes sont unitaires (dont LE pgcd) donc $X^a-1 \wedge X^b-1 = X^d-1$.

Remarque : la deuxième méthode fonctionne aussi pour montrer

$$(2^a-1) \wedge \left(2^b-1\right) = \left(2^d-1\right).$$

3. Fractions rationnelles

Solution de 23 :

Décomposition en éléments simples.

Solution de 24 :

$$\left(\frac{1}{X(X^2-1)}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{X^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2(X+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2(X-1)^{n+1}}.$$

Solution de 25 :

$$\frac{X^{n+1}}{X^n-1} = X + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}.$$

Solution de 26 :

Décomposer en éléments simple puis se ramener à $\frac{P'}{P}$ pour S. Pour T, quelle opération algébrique permet de faire apparaître un carré au dénominateur ?

Réponses :
$S = -\frac{1}{2}\frac{P'}{P}(1) + \frac{1}{2}\frac{P'}{P}(-1) = -\frac{2}{3}$.
$T = -\left(\frac{P'}{P}\right)'(1) = -3$.

Solution de 27 :

$\frac{P''}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X-x_k}$ avec $\lambda_k = \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$ est le cœfficient en X^{n-1} dans P'' : il est nul.

Solution de 28 : Théorème de Gauss-Lucas

Quantité conjuguée....

$0 = \sum \lambda_k (z-x_k)$ avec $\lambda_k = \frac{1}{|z-x_k|^2}$.