

Exercices cherchés en cours

Normes

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Solution de 8 : Ex CCINP 38

1. (a) On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Montrons que N_∞ est une norme sur E .

Par définition, $N_\infty(P) \geq 0$.

- Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E$ tel que $N_\infty(P) = 0$.

C'est-à-dire $\max_{0 \leq i \leq n} |a_i| = 0$, donc, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $|a_i| = 0$.

On en déduit que $P = 0$.

- Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$N_\infty(\lambda P) = \max_{0 \leq i \leq n} |\lambda| |a_i| = |\lambda| N_\infty(P).$$

- Soit $(P, Q) \in E^2$.

On considère un entier n tel que $n \geq \max(\deg P, \deg Q)$.

$$\text{Alors, } P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ et } Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i.$$

$$\text{Ainsi, } P + Q = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \text{ et } N_\infty(P + Q) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i + b_i|.$$

Or, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i| \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q).$$

Donc

$$N_\infty(P + Q) \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q).$$

On en déduit que N_∞ est une norme.

Voir cours.

- (b) Pour $P_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$ on a $N_1(P_n) = n + 1$ et $N_\infty(P_n) = 1$, donc

$$\frac{N_1(P_n)}{N_\infty(P_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On en déduit que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

2. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, en particulier N'_1 et N'_∞ .

Solution de 9 :

Les côtés d'un tel parallélogramme ont des équations de la forme

$$\begin{aligned}
 ax + by &= 1 \\
 ax + by &= -1 \\
 cx + dy &= 1 \\
 cx + dy &= -1
 \end{aligned}$$

vu la symétrie et le fait que le parallélogramme ne soit pas aplati, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$ et avec $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$ car les côtés sont sécants.

On démontre alors facilement que $N : (x, y) \mapsto \max(|ax + by|, |cx + dy|)$ est une norme répondant au problème.

Solution de 11 :

Le sens direct, c'est du cours.

Réciproquement, si $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est défini-positive, homogène et que sa boule unité fermée est convexe, soit $x, y \in E$.

Si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$, l'inégalité triangulaire est immédiate.

Sinon, on s'intéresse à $(1-t)\frac{x}{N(x)} + t\frac{y}{N(y)} \in B'(0_E, 1)$ pour $t = \frac{N(y)}{N(x) + N(y)}$ et on obtient $\frac{N(x+y)}{N(x) + N(y)} \leq 1$ (sans oublier que l'on ne sait pas encore que N est une norme mais le fait qu'elle soit défini-positive et homogène permet de justifier les calculs.)

Solution de 14 : Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$

Indications :

1. Concavité de $\ln$.
2. Appliquer la première question à $\frac{|x_k|}{\alpha}$ et $\frac{|y_k|}{\beta}$ et sommer, puis remplacer α et β .
3. Utiliser deux fois la question précédente dans l'indication.
4. Seule l'IT est difficile mais c'est la question précédente.
5. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$.

Correction plus détaillée :

1. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la concavité de $\ln$ appliquée à a^p et b^q .
2. C'est immédiat si $x = (0, \dots, 0)$ ou $y = (0, \dots, 0)$.

Sinon, posons $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$ et $y' = \frac{y}{\|y\|_p}$ de telle sorte que $\|x'\|_p = \|y'\|_p = 1$. On veut alors montrer

$$\text{que } \sum_{k=1}^n |x'_k y'_k| \leq 1.$$

D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x'_k y'_k| \leq \frac{1}{p} |x'_k|^p + \frac{1}{q} |y'_k|^q$ d'où, en sommant,

$$\sum_{k=1}^n |x'_k y'_k| \leq \frac{1}{p} \|x'\|_p^p + \frac{1}{q} \|y'\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

3. ■ En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ puis la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ donc $p + q = pq$ donc $q(p-1) = pq - q = p$.

Ainsi,

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p+1/q} = \left(\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q},$$

ce qui permet de conclure, que $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p$ soit nul (auquel cas l'inégalité à montrer est triviale) ou non.

- La bonne définition, la séparation et l'homogénéité de $\|\cdot\|_p$ ne posent pas de problème. L'inégalité triangulaire a été vue dans la question précédente.

4. On remarque que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (n \|x\|_\infty^p)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty$$

avec $n^{1/p} = e^{\ln n/p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \infty$ donc $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|x\|_\infty$.

Topologie

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Vrai ou faux

1. Un voisinage d'un point est toujours borné.
2. Une partie qui n'est pas ouverte est fermée.
3. Une intersection d'ouverts est ouverte.
4. L'adhérence d'une partie est toujours fermée.
5. Si un fermé contient une partie, il contient son adhérence.
6. Si une partie A est fermée, toute suite d'élément de A converge dans A .
7. Un point n'est pas intérieur à A si et seulement s'il est adhérent au complémentaire de A .

Ouverts, fermés

Solution de 21 :

1. Si ξ est racine de P alors

$$\xi^3 = -a\xi^2 - b\xi - c$$

Cas : $|\xi| \leq 1$. L'inégalité voulue est vérifiée. Cas : $|\xi| > 1$. On vérifie $1 \leq |\xi|^2$ et $|\xi| \leq |\xi|^2$. On a alors

$$\begin{aligned} |\xi|^3 &= |a\xi^2 + b\xi + c| \leq |a||\xi|^2 + |b||\xi| + |c| \\ &\leq |a||\xi|^2 + |b||\xi|^2 + |c||\xi|^2. \end{aligned}$$

En simplifiant par $|\xi|^2$,

$$|\xi| \leq |a| + |b| + |c|$$

et l'inégalité voulue est à nouveau vérifiée.

2. Soit $(a_n, b_n, c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $\mathcal{D}$ et notons (a, b, c) sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons x_n, y_n et z_n les trois racines réelles du polynôme $P_n = X^3 + a_n X^2 + b_n X + c_n$ que l'on sait scindé sur $\mathbb{R}$.

La suite $(a_n, b_n, c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car convergente et la suite $(x_n, y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est donc aussi en vertu du résultat de la première question. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(k)}, y_{\varphi(k)}, z_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Notons (x, y, z) la limite de celle-ci. Par les relations coefficients/racines d'un polynôme scindé, on sait

$$\begin{cases} a_n = -(x_n + y_n + z_n) \\ b_n = x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n \\ c_n = -x_n y_n z_n \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cela vaut en particulier pour $n = \varphi(k)$ et en faisant alors tendre k vers l'infini, il vient

$$\begin{cases} a = -(x + y + z) \\ b = x y + y z + z x \\ c = -x y z \end{cases}$$

Par ce système, on peut affirmer que les réels x, y et z sont les trois racines du polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c$ qui est donc scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $(a, b, c) \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ est donc une partie fermée car contient les limites de ses suites convergentes.

Solution de 22 :

(a) Les éléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sont bornés donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. L'appartenance de l'élément nul et la stabilité par combinaison linéaire sont immédiates.

(b) Si $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est ouvert alors puisque $0 \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ il existe $\alpha > 0$ tel que $B_\infty(0, \alpha) \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Or la suite constante égale à $\alpha/2$ appartient à $B_\infty(0, \alpha)$ et n'est pas nulle à partir d'un certain rang donc $B_\infty(0, \alpha) \not\subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas ouvert.

Pour $N \in \mathbb{N}$, posons u^N définie par $u_n^N = \frac{1}{n+1}$ si $n \leq N$ et $u_n^N = 0$ sinon.

$(u^N) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $u^N \rightarrow u$ avec u donné par $u_n = \frac{1}{n+1}$. En effet,

$$\|u^N - u\|_\infty = \frac{1}{N+2} \rightarrow 0.$$

Mais $u \notin \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas fermé

Adhérence, intérieur

Densité

Solution de 31 :

Déjà vu : introduire $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ lorsqu'il existe et séparer les cas où $\alpha = 0$ (dense, semblable à la densité de $\mathbb{Q}$) ou $\alpha > 0$ (discret, avec une presque division euclidienne, semblable aux sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ ou aux idéaux de $(\mathbb{K}[X], +)$).

Applications :

1. Densité de $\left\{ \frac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$:

Soit b un entier au moins égal à 2. On note $G = \left\{ \frac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$. On a bien sûr $G \neq \emptyset$ et $G \neq \{0\}$.

De plus, si x et y sont des éléments de G , on a $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{b^k}$ et $y = \frac{a'}{b^{k'}}$.

Mais alors $x - y = \frac{ab^{k'} - a'b^k}{b^{k+k'}}$ avec $ab^{k'} - a'b^k \in \mathbb{Z}$ et $k + k' \in \mathbb{N}$, donc $x - y \in G$.

De plus, comme 0 minore $G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{b^k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ (car $b > 1$) avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{b^k} \in G$,

$$\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0.$$

C'est donc que $\left\{ \frac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : cette densité se retrouve directement en remarquant que la suite de terme général $x_n = \frac{\lfloor b^n x \rfloor}{b^n}$ élément de G converge vers $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

2. CNS pour que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

Soit $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. On vérifie sans mal que G n'est ni vide, ni réduit à 0 et que la différence de deux éléments de G est encore dans G .

Remarquons que dire que

$$\text{« } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q} \text{ »}$$

c'est dire que

$$\text{« } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ n'est pas dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}. \text{ »}$$

- Si $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, alors, d'après ce qui précède, $G = \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$. Donc, comme $a \in G$ et $b \in G$, on a deux entiers k et k' (non nuls car a et b sont non nuls) tels que $a = \alpha k$ et $b = \alpha k'$.

$$\text{Alors } \frac{a}{b} = \frac{k}{k'} \in \mathbb{Q}.$$

- Réciproquement, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, soient n et m deux entiers tels que $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$. Pour tout $x \in G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, on a $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $x = ap + bq$. Mais alors

$$x = b \frac{n}{m} p + bq = \frac{b}{m} (np + mq) \in \frac{b}{m} \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset \frac{b}{m} \mathbb{Z}$. Mais alors G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car on ne peut pas, par exemple, trouver d'élément de G entre $\frac{b}{3m}$ et $\frac{b}{2m}$.

(On peut aussi voir que $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) \geq \frac{b}{m} > 0$.)

(Remarque : le théorème de Bézout permet de dire que si la fraction $\frac{n}{m}$ est irréductible, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{b}{m}\mathbb{Z} (= \frac{a}{n}\mathbb{Z})$.)

Conclusion : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

3. Autre application :

D'après la question précédente, comme $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Donc entre π et $\pi + 10^{-9}$, il y a un réel de la forme $p + q\sqrt{2}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$.

Solution de 32 :

Supposons H hyperplan non fermé. On a alors une suite $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x \notin H$. Mais comme H est un hyperplan, $H \oplus \mathbb{K}x = E$.

Soit $y \in E$. Il s'écrit $y = h + \lambda x$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Mais alors $(h + \lambda x_n)_n$ est une suite d'éléments de H qui converge vers y donc H est dense dans E .

Remarque : en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé comme noyau d'une forme linéaire, qui est automatiquement continue.

Autre rédaction possible : Sachant que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un (ce résultat n'apparaît pas dans le programme, mais c'est facile à remonter avec la caractérisation séquentielle), on a $\overline{H}$ un sous-espace de E tel que $H \subset \overline{H} \subset E$. Or, si $\overline{H} \neq H$, on a $x \in \overline{H} \setminus H$ et alors par propriété des hyperplans, $H \oplus \mathbb{K}x = E$ avec $H \subset \overline{H}$ et $x \in \overline{H}$ donc (c'est là qu'on utilise le fait que $\overline{H}$ est un sous-espace) $E = H \oplus \mathbb{K}x \subset \overline{H} \subset E$ donc $H = E$.