

ESPACES VECTORIELS NORMÉS, TOPOLOGIE

- Dans la définition d'une norme, c'est souvent l'inégalité triangulaire qui demande du travail. Ne pas oublier de vérifier que l'application est bien définie, lorsque ce n'est pas immédiat.
- Pour montrer que deux normes sont équivalentes : en dimension finie, c'est donné par un théorème du cours. En dimension infinie, on les domine mutuellement, c'est-à-dire qu'on cherche à obtenir α, β telles que $N \leq \alpha N'$ et $N' \leq \beta N$.
- Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, c'est plus délicat : il faut montrer qu'on n'a pas de α tel que $N \leq \alpha N'$ ou qu'on n'a pas de β tel que $N' \leq \beta N$. Une idée peut être de construire une suite (x_n) d'éléments de E telle que $N(x_n) \rightarrow +\infty$ et $(N'(x_n))$ bornée ou l'inverse, ou encore tel que $\frac{N'(x_n)}{N(x_n)} \rightarrow +\infty$.
- Attention, ouverts et fermés ne sont pas antinomiques. On peut être l'un et l'autre et on n'est, en général, ni l'un ni l'autre.
- Les caractérisations séquentielles sont très pratiques : si elles ne sont pas systématiquement utilisées, elles permettent souvent de faire des raisonnements concis.

Exercices cherchés en cours

- 1** CCINP 37 **2** CCINP 34 **3** CCINP 44 **4** CCINP 45

Normes

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- 5** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq n} |P(a_k)|$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

- 6** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$. Montrer que cela définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 7** Soit l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$.
1. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
 2. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \|f\|$.
 3. Démontrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

8 Ex CCINP 38

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ où $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $n \geq \deg P$.

1. (a) Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
(b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1 .
(c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k . On note N'_1 la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N'_∞ la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$. Les normes N'_1 et N'_∞ sont-elles équivalentes ?

- 9** Montrer que tout parallélogramme non aplati centré à l'origine est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

- 10** Soit N définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x + ty|$. Montrer qu'il s'agit d'une norme et dessiner sa boule unité.

- 11** Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacée par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x) \leq 1$ est un convexe de E).
Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y .

- 12** Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$ une fonction telle que pour tout $x \in]0, 1[$, $\varphi(x) > 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $N(f) = \int_0^1 \varphi(t) |f(t)| dt$.
1. Démontrer que N est une norme sur E .
 2. Démontrer que N est dominée par N_∞ .
 3. Démontrer que les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

- 13** Montrer que toute norme est 1-lipschitzienne.

14 Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On note $\alpha = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$ et $\beta = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}$.

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$.
2. On veut en déduire l'inégalité de Hölder sur $\mathbb{K}^n$ $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}$.

Commencer par la démontrer en supposant $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p} = 1$ et $\|y\|_q = \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n |y_k|^q} = 1$, puis, dans le cas général, en normalisant les vecteurs (c'est-à-dire en les divisant par $\|x\|_p$).

et $\|y\|_q$, respectivement (Attention : on ne sait pas encore que ce sont des normes) lorsque c'est possible.)

Quelle inégalité classique retrouve-t-on en particulier ?

3. En remarquant que $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1}$, en déduire l'inégalité de Minkowski $\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}$.

4. Montrer que $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

5. Calculer la limite de $\|x\|_p$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

Remarque : On peut faire le même travail et obtenir des résultats similaires avec des intégrales de fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

- 15** Retrouver le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire d'une norme euclidienne (inégalité de Minkowski). En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas euclidienne.

Topologie

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Vrai ou faux

- Un voisinage d'un point est toujours borné.
- Une partie qui n'est pas ouverte est fermée.
- Une intersection d'ouverts est ouverte.
- L'adhérence d'une partie est toujours fermée.
- Si un fermé contient une partie, il contient son adhérence.
- Si une partie A est fermée, toute suite d'élément de A converge dans A .
- Un point n'est pas intérieur à A si et seulement s'il est adhérent au complémentaire de A .

Ouverts, fermés

- 16** Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, [0, 1[, [0, +\infty[,]0, 1[\cup \{2\}, \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$.

- 17** Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ est fermée.

- 18** Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < |x - 1| < 1\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq y\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1, |y| \leq 1\}$
- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 4\}$

- 19** Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E ouvert. Montrer que $F = E$.

- 20** Soit E un espace vectoriel normé, F, G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, p, q les projections associées à la somme directe $F \oplus G$ et A une partie de E . Montrer que si A est ouverte, $p(A)$ est un ouvert (relatif) de F et $q(A)$ est un ouvert de G . En est-il de même pour une partie fermée ?

- 21** 1. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme réel. Vérifier que les racines ξ de P satisfont

$$|\xi| \leq \max\{1, |a| + |b| + |c|\}.$$

2. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ soit scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$.

- 22** On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

- Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées.
- $\ell^\infty(\mathbb{R})$ étant normé par $\|\cdot\|_\infty$. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie ouverte ? une partie fermée ?

Adhérence, intérieur

- 23** Montrer que $\hat{A}^c = \overline{A^c}$ et $\overline{A^c} = \hat{A}^c$.

- 24** Montrer que si A et B sont des parties de E telles que A est ouverte, alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ et que $A \cap B = \emptyset \implies A \cap \overline{B} = \emptyset$.

- 25** Si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, montrer que $\sup A$ est l'unique majorant de A adhérent à A .

- 26** Si A et B sont deux parties de E , montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, $\overset{\circ}{A \cup B} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ et donner des contre-exemples pour les inclusions réciproques.

- 27** Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}$.

- 28** Soit F sous-espace vectoriel normé de E . Montrer que soit $F = E$ soit $\hat{F} = \emptyset$.

- 29** Soit A une partie de E . Comparer par inclusion les parties $A, \overline{A}, \hat{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\hat{A}}, \overset{\circ}{\overline{A}}$. Peut-on créer d'autres combinaisons ? Calculer tous ces ensembles pour $A = \{0\} \cup [1, 2[\cup]2, 3] \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5])$.

30 Frontière

1. Comparer $\text{Fr } A$ et $\text{Fr } A^c$.
2. Montrer que $\text{Fr } A \cup B \subset \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $\text{Fr } \bar{A} \subset \text{Fr } A$ et $\text{Fr } \overset{\circ}{A} \subset \text{Fr } A$. Ces inclusions sont-elles des égalités ?
4. Montrer que si A est fermée, alors $\text{Fr}(\text{Fr } A) = \text{Fr } A$.

Densité

31 Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit denses, soit discrets (de la forme $a\mathbb{Z}$

pour $a \in \mathbb{R}$.)

Applications :

1. Soit b un entier au moins égal à 2. Montrer que $\left\{ \frac{a}{b^k}, (a, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On note $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ap + bq \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$.
Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer qu'entre π et $\pi + 10^{-9}$, il y a un réel de la forme $p + q\sqrt{2}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$.

32 Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé est soit fermé, soit dense.

33 Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E . Montrer que $U \cap V$ est dense.