1. Espaces vectoriels

Solution de 2 :

Pour la première et la troisième, passer par des polynômes, pour la deuxième, utiliser une propriété de dérivabilité.

Pour la quatrième, dériver deux fois et faire une opération avec la relation de départ pour se débarrasser d'un terme. On conclut par récurrence.

Solution de 3 :

$F = \mathrm{Vect}\,1$, G et H sev par caractérisation.

Puis anaylse-synthèse : si, avec des notations évidentes, $\phi = f + g + h$, alors en intégrant, $f : x \mapsto \phi(0)$, $g(x) = \phi(x) - \phi(0)$ si $x > 0$ et 0 sinon, $h(x) = \phi(x) - \phi(0)$ si $x < 0$ et 0 sinon. La synthèse ne pose pas de problème.

2. Dimension finie

Solution de 5 :

$E = \mathrm{Vect}\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ famille Q-libre (...) donc $\dim E = 3$.

Solution de 6 :

Utiliser la formule de Grassmann.

Solution de 7 :

Soit $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $\mathscr{D} = (k_1, \dots, k_p)$ une base du $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

Soit enfin $\mathscr{B} = (k_i e_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ famille de np vecteurs de E.

Alors tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des e_j dont les coefficients, dans $\mathbb{K}$, sont eux-même combinaisons linéaire des k_i à coefficients dans $\mathbb{L}$: $x = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j} k_i \right) e_j = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} k_i e_j$. Ainsi, les vecteurs de E sont tous combinaison linéaire des $k_i e_j$ et $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{L}}(k_i e_j)_{i,j}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.

De plus, si $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} k_i e_j = 0_E$ où les $\lambda_{i,j}$ sont des scalaires de $\mathbb{L}$, alors $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j} k_i \right) e_j = 0_E$. Comme $\mathscr{C}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, pour tout j entre 1 et n, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j} k_i = 0_{\mathbb{K}}$ et comme $\mathscr{D}$ est une base de $\mathbb{K}$, pour tout i entre 1 et p, $\lambda_{i,j} = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est libre.

Finalement, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base du } \mathbb{L}\text{-espace vectoriel } E \text{ qui est de dimension } np.}$

3. Applications linéaires

4. Calcul matriciel

5. Matrices d'applications linéaires

Solution de 48 :

1. Par opérations élémentaires, M est équivalente à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$: $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(B-A)$.
2. Résoudre $M\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ avec A et $B-A$ inversibles.