1. Exercices traités en cours

Solution de 2 :

- $\Longleftarrow$: ok
- $\Longrightarrow$: Si $H \cup K$ sous- groupe de G et $H \not\subset K$, on va montrer que $K \subset H$.
  On a $h \in H \setminus K$.
  Soit $k \in K$. Alors $k \star h \in H \cup K$ par stabilité de $\star$ sur $H \cup G$.
  Si $k \star h \in K$, alors $h = k^{-1} \star (k \star h) \in K$, ce qui n'est pas possible.
  C'est donc que $k \star h \in H$ et donc $k = (k \star h) \star h^{-1} \in H$.
  Finalement, on a bien $K \subset H$.

2. Structure de groupe

3. Anneaux et idéaux, corps

4. Arithmétique entière

Solution de 34 :

1. $(n^3+n) \wedge (2n+1) = 1$ si et seulement si
   $$n(n^2+1) \wedge (2n+1) = 1$$
   si et seulement si
   $$\begin{cases} n \wedge (2n+1) = 1 \\ (n^2+1) \wedge (2n+1) = 1 \end{cases}$$
   Il s'agit de la propriété $ab \wedge c = 1 \iff a \wedge c = 1$ et $b \wedge c = 1$: le sens direct s'obtient avec le théorème de Bézout ou en s'intéressant au diviseurs communs possibles de a et c d'une part et de b et c d'autre part, le sens réciproque s'obtient en multipliant des relations de Bézout : $1 = (au + cv)(bu' + cv') = abU + cV$...
   Or, en se souvenant de la propriété d'Euclide $a \wedge b = (a - bq) \wedge b$ (pas nécessairement une division euclidienne), on obtient $n \wedge (2n+1) = n \wedge 1 = 1$ toujours vrai.
   Puis, toujours avec cette propriété $(n^2+1) \wedge (2n+1) = (n^2 - 2n) \wedge (2n+1) = n(n-2) \wedge (2n+1)$.
   Donc
   $$(n^3+n) \wedge (2n+1) = 1 \iff \begin{cases} n \wedge (2n+1) = 1 \\ (n-2) \wedge (2n+1) = 1 \end{cases} \iff (n-2) \wedge (2n+1) = 1 \iff (n-2) \wedge \big(2n+1-2(n-2)\big) = (n-2) \wedge 5 = 1$$
   Comme 5 est premier, on en déduit que les solutions sont les entiers n tels que $5 \nmid (n-2)$ c'est-à-dire tels que $\boxed{n \not\equiv 2\ [5]}$.
2. On écrit $2n^2 + 9n + 13 = 2(n+2)^2 + n + 5 = 2(n+2)^2 + (n+2) + 3$.
   Donc $(n+2) | (2n^2 + 9n + 13)$ si et seulement si $n+2 | 3$ si et seulement si $n+2 \in \{-1, 1, -3, 3\}$. Les solutions sont $\boxed{-3, -1, -5, 1}$ (ce que l'on peut effectivement vérifier).

3. Avec la propriété d'Euclide, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$(21n+4)\wedge(14n+3) = \big(21n+4-(14n+3)\big)\wedge(14n+3) = (7n+1)\wedge\big(14n+3-2(7n+1)\big) = (7n+1)\wedge 1 = 1$$

Autre méthode, avec une relation de Bézout :

$$-2(21n+4)+3(14n+3) = 1.$$

Solution de 35 : Nombres de Mersenne [4]- Très classique - Oral Centrale

La factorisation

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1}+\cdots+1)$$

donne la première réponse, puis

$$2^{n_1 n_2} - 1 = (2^{n_1})^{n_2} - 1 = (2^{n_1}-1)(\dots)$$

donne la deuxième.

Solution de 36 : Nombres de Fermat [6]- Très classique - Oral Mines

Si n a un facteur premier impair p, on écrit

$$2^n + 1 = 2^{mp} + 1 = (2^m)^p + 1$$

Or on connaît très bien

$$a^n - b^n = (a-b)(\dots)$$

Mais, si n est impair, remplaçant b par $-b$, on en déduit

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - b a^{n-2} + \cdots + b^{n-1})$$

Appliqué à notre situation, on trouve

$$2^n + 1 = (2^m+1)(2^{m(p-1)} - 2^{m(p-2)}\cdots + 1)$$

On prend bien soin de justifier que c'est une vraie factorisation ($1 < 2^m + 1 < 2^n + 1$). Et on a résolu la première question. Comme souvent, c'est l'exercice classique sur les nombres de Mersenne (si $a^n - 1$ est premier, $a = 2$ et n est premier) qui peut donner l'idée

Solution de 37 :

S'intéresser aux diviseurs premiers de $N = 4p_1 \cdots p_n - 1$ si les nombres premiers de la forme $4k-1$ sont exactement $p_1, \dots, p_n$.

Solution de 38 :

Il suffit de considérer les entiers de $1001!+2$ à $1001!+1001$.

Solution de 39 : Formule de Legendre - Très classique - Oraux divers

Les multiples de q s'écrivent $k = q\ell$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$ uniquement déterminé par k et q, et alors $1 \leqslant k = q\ell \leqslant n$ si et seulement si $\frac{1}{q} \leqslant \ell \leqslant \frac{n}{q}$ si et seulement si $1 \leqslant \ell \leqslant \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$.

Le nombre de multiples de q entre 1 et n est donc $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$.

Ainsi, la valuation p-adique de $n!$ avec p premier s'obtient en ajoutant les valuations p-adiques des entiers entre 1 et m, d'après la question précédente :

- les $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ multiples de p fournissent chacun (au moins) un facteur p,
- les $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ multiples de p^2 fournissent chacun (au moins) un facteur p supplémentaire,
- les $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$ multiples de p^3 fournissent chacun (au moins) un facteur p supplémentaire,
- et ainsi de suite.

Le décompte s'arrête car la suite entière $\left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ finit par s'annuler et on obtient la formule de Legendre (avec un nombre fini de termes non nuls) :

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.}$$

Autre rédaction possible : on peut dénombrer les entiers entre 1 et n ayant une valuation q-adique exactement égale à $i \in \mathbb{N}$: il s'agit des multiples de q^i qui ne sont pas multiples de q^{i+1} et qui sont au nombre de $\left\lfloor \frac{n}{q^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{q^{i+1}} \right\rfloor$, d'où la formule (les sommes étant toujours faussement infinies)

$$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{i+1}} \right\rfloor\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{+\infty} (i-1) \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

Solution de 42 : Oral Centrale

7

Solution de 43 :

$f : k \mapsto$ (somme des chiffres de k). Calculer $f \circ f \circ f(n)$.

$f(n) \equiv n\ [9]$. Or $4444 = 9 \times 493 + 7$, donc $4444 \equiv 7\ [9]$ et $4444^{4444} \equiv 7^{4444}\ [9]$.

Mais $7^2 \equiv 4\ [9]$, $7^3 \equiv -2\ [9]$ et $7^3 \equiv 1\ [9]$. D'où $7^{4444} = 7^{3k+1} \equiv 7\ [9]$ donc $f(n) \equiv 7\ [9]$. Puis $f(f(f(n))) \equiv 7\ [9]$.

De plus, $n \leqslant 10000^{5000} = 10^{20000}$. Donc n possède au plus $20\,000$ chiffres et $f(n) \leqslant 9 \times 20000 = 180000$.

Puis $f(f(n)) \leqslant 1 + 8 + 4 \times 9 = 45$ et $f(f(n)) \equiv f(n) \equiv 7\ [9]$.

Donc $f(f(f(n))) < 4 + 9 = 13$ et $f(f(f(n))) \equiv 7\ [9]$. Donc $f(f(f(n))) = 7$.

Solution de 44 : Oral Mines

p est congru à 1 ou à -1 modulo 3 (car $p > 3$), donc $p+1$ ou $p-1$ est divisible par 3. Donc $p^2 - 1$, leur produit, l'est. De plus, p, premier et impair car > 2, est congru à 1, 3, 5 ou 7 modulo 8. Donc son carré est congru à 1, 1, 1 ou 1 modulo 8. Donc $p^2 - 1$ est divisible par 3 et par 8, qui sont premiers entre eux, il est donc divisible par 24.

Autre méthode : remarquer que parmi $p-1$, p et $p+1$, l'un est divisible par 3 et parmi $p-1$, p, $p+1$, $p+2$, l'un est divisible par 4.

5. Compléments sur les groupes