

Vrai ou faux

1. Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.
2. Si $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[)$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$ est une primitive de f de limite nulle en $+\infty$.
3. Dire que « f est intégrable sur I », $\int_I f$ converge absolument ou encore $\int_I |f|$ converge, c'est la même chose.
4. f positive est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.
5. $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ n'est jamais intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$.
6. Si deux fonctions sont équivalentes en $+\infty$, elles sont simultanément intégrables ou non intégrables sur $[a, +\infty[$.
7. Si f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et nulle.
8. Si $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature.

1 ex CCINP 19

1. Prouver que, pour tout entier naturel n , $f_n : t \mapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t dt$.
2. Prouver que $f : t \mapsto e^t \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$

Solution de 1 : ex CCINP 19

1. On pose, pour tout entier naturel n , $f_n : t \in]0, 1] \mapsto t^n \ln t$.
Pour tout entier naturel n , f_n est continue par morceaux sur $]0, 1]$.
On a $t^{\frac{1}{2}} |f_n(t)| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ donc, au voisinage de 0, $|f_n(t)| = o\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$.
Or, $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (fonction de Riemann intégrable). Donc f_n est intégrable sur $]0, 1]$.
De plus, pour $x \in]0, 1]$, par intégration par parties

$$\int_x^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1} \ln t}{n+1} \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

On en déduit, en faisant tendre x vers 0, que $I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

- 2 CCINP 25 Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- 3 CCINP 26 Questions 1 et 2.a.

- 4 CCINP 28

- 5 CCINP 29 Questions 1 et 2.

6

Dire si les intégrales suivantes convergent. On cherchera d'abord s'il y a intégrabilité (absolue convergence). Et on ne s'occupera de convergence non absolue que s'il n'y a pas convergence absolue. Le cas échéant, dire pour quelles valeurs du paramètre les intégrales ont un sens.

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} dt$$

$$3. \int_0^1 \ln t dt$$

$$4. \int_0^1 (-\ln t)^\alpha dt \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

$$6. \int_0^{+\infty} \cos t dt$$

$$7. \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$$

$$8. \int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{t}) dt$$

$$9. \int_0^{\pi/2} \tan t dt$$

$$10. \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$$

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$

$$12. \int_e^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta} dt$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$13. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t+1} - \sqrt{t}}{t} dt$$

$$14. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t) dt$$

où P fonction polynomiale

$$15. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$$

$$16. \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\sinh t}} dt$$

$$17. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}} dt$$

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$

$$19. \int_0^1 \frac{(-\ln t)^\alpha}{(1-t)^\beta} dt$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Solution de 6 :

$$8. \int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{t}) dt$$

La fonction $t \mapsto \cos(\sqrt{t})$ est continue sur $[0, +\infty[$.

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$. L'existence de l'intégrale équivaut à celle de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} 2u \cos u du$$

et en cas d'existence elles sont égales. Or, déjà $\int_0^{+\infty} \cos u du$ ne converge pas, alors celle-ci... On peut calculer par

parties $\int_0^x u \cos u du$ et voir qu'il n'y a pas de limite en $+\infty$. Ou encore dire que l'aire sous une arche est grande : si $k \geq 1$,

$$\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} u \cos u du \geq (-\pi/2+2k\pi) \int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} \cos u du = (4k-1)\pi$$

(On a pris soin de considérer une zone de positivité du cosinus, pour pouvoir multiplier des inégalités par $\cos u$ sans en changer le sens). Or si $\int_0^x u \cos u du$ avait une limite réelle en $+\infty$, $\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} u \cos u du$ tendrait vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$ (relation de Chasles).

$$9. \int_0^{\pi/2} \tan x dx$$

La fonction $\tan$ est continue, positive sur $[0, \pi/2[$. Plusieurs méthodes sont tout aussi valables :

- Un équivalent : $\tan(x) = \frac{1}{\tan(\pi/2-x)} \underset{x \rightarrow \pi/2}{\sim} \frac{1}{\pi/2-x}$, donc pas d'intégrabilité (comparaison à une fonction de Riemann), pas plus de convergence d'intégrale puisque pour une fonction positive c'est la même chose.

- Un calcul de $\int_0^x \tan x dx$ (avec un $\ln$) qui aboutit bien sûr à la même conclusion.

- un changement de variable $x = \operatorname{Arctan}(u)$. Même conclusion.

$$10. \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est continue, négative sur $]0, 1[$. Notons-la f . On a

$$f(t) \sim_{t \rightarrow 0} \ln t$$

donc, par croissances comparées,

$$|f(t)| = o_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right)$$

(valeurs absolues facultatives, mais recommandées) ce qui donne l'intégrabilité sur $]0, 1/2[$. Mais aussi

$$f(t) \sim_{t \rightarrow 1} -\sqrt{1-t}$$

et donc f est prolongeable par continuité à $]0, 1]$, pas de problème donc d'intégrabilité sur $[1/2, 1]$.

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \geq 0$ et prolongeable par continuité à $[0, +\infty[$ si $\alpha < 0$ (elle a dans ce dernier cas pour limite 0 en 0). Si $\alpha < 0$, $f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} 1$. Si $\alpha = 0$, $f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Si $\alpha > 0$, $f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^\alpha}$. Par comparaison à une fonction de Riemann, il y a intégrabilité (ou convergence de l'intégrale, ici c'est la même chose) si et seulement si $\alpha > 1$.

$$12. \int_e^{+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} dx \quad (\alpha, \beta \text{ réels}).$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ est continue positive sur $[e, +\infty[$. Si $\beta > 1$, fixons $\gamma \in]1, \beta[$. Par croissances comparées,

$$f(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^\gamma} \right)$$

et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, f est intégrable sur $[e, +\infty[$.

Si $\beta < 1$, par croissances comparées,

$$\frac{1}{x} = o_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$$

et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, f n'est pas intégrable sur $[e, +\infty[$.

Si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$, encore non intégrabilité par le même argument.

Si $\beta = 1$ et $\alpha = 0$, non intégrabilité directe (Riemann).

Si $\beta = 1$ et $\alpha < 0$, on ne peut plus utiliser de comparaison (ce n'est plus assez « fin »), on calcule

$$\int_e^x \frac{(\ln x)^\alpha}{x} dx$$

car on sait trouver une primitive (on distingue le cas $\alpha = -1$, la primitivation se fait avec un $\ln(\ln x)$, sinon la primitivation se fait avec une puissance de $\ln x$). On trouve qu'il y a intégrabilité si et seulement si $\alpha < -1$. Bien sûr on a déjà rencontré ce genre de chose, c'est une intégrale « de Bertrand ».

$$13. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t+1} - \sqrt{t}}{t} dt$$

Fonction continue, positive sur $[1, +\infty[$. Il est judicieux d'obtenir un équivalent en $+\infty$. Pour cela, classiquement, mise en facteur dans $1+x$ du terme prédominant, x :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= x^{1/2} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1/2} - 1 \right) \\ &= x^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) - 1 \right) \\ &\sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^{1/2}} \end{aligned}$$

Donc $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^{3/2}}$, ce qui donne l'intégrabilité par comparaison à l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$).

14. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t) dt$ où P fonction polynomiale

Fonction continue sur $]-\infty, +\infty[$. Par croissances comparées, $\left| e^{-t^2} P(t) \right| = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ d'où l'intégrabilité.

15. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$

Fonction continue sur $]0, +\infty[$; intégrabilité sur $]0, 1[$ assez simple grâce à l'équivalent

$$\left| \frac{\sin \sqrt{t}}{t} \right| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et la référence à Riemann.

D'autre part, par changement de variable $t = u^2$, $u = \sqrt{t}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$ a même nature (et dans le cas de convergence, même valeur) que $2 \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$, intégrale notoirement semi-convergente (mais il faut savoir le redémontrer). Convergence, donc, on peut même dire semi-convergence. Une astuce consistait à écrire le dénominateur $\sqrt{t} \times \sqrt{t}$, intégrer par parties car on sait primitiver $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$, on aboutit au même résultat.

16. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\sinh t}} dt$

17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}} dt$

18. $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

19. Intégrale de Bertrand

7

Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4t^3 - t} dt$.

3. $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt$
où $0 < a < b$.

4. $\int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)} dt$

5. $\int_{-1}^1 \frac{t+1}{\sqrt{|t|}} dt$

8

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue admettant une limite ℓ en $+\infty$ et $a > 0$. Montrer que $\int_x^{x+a} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a\ell$ puis montrer que $\int_0^{+\infty} (f(t+a) - f(t)) dt$ converge et déterminer sa limite.

2. Calculer $\int_0^{+\infty} (\text{Arctan}(t+1) - \text{Arctan } t) dt$

Solution de 8 :

1. Soit $\varepsilon > 0$. On a $A \in \mathbb{R}$ tel que si $x \geq A$, $|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{a}$. Alors, si $x \geq A$,

$$\left| \int_x^{x+a} f(t) dt - a\ell \right| = \left| \int_x^{x+a} (f(t) - \ell) dt \right| \leq \int_x^{x+a} |f(t) - \ell| dt \leq \varepsilon$$

On peut aussi effectuer le changement de variable $u = t - x$ et appliquer le théorème de convergence dominée (sur le segment $[0, a]$, il suffit de dominer la fonction continue f par une constante comme $\|f\|_\infty$.)

Puis

$$\int_0^x (f(t+a) - f(t)) dt = \int_a^{x+a} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = \int_x^{x+a} f(t) dt - \int_0^a f(t) dt \rightarrow \int_0^{+\infty} (f(t+a) - f(t)) dt = a\ell - \int_0^a f(t) dt.$$

2. Ainsi, $\int_0^{+\infty} (\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan} t) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt = \frac{\pi}{4}.$

9 Calcul de l'intégrale de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$

1. Montrer que I converge et vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{t^2} dt$, $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2 t} dt.$
Montrer que $B_n \leq I_n \leq A_n.$
3. Calculer $C_n = A_{n+1} - A_n$, $C_{n+1} - C_n$ et $A_n - B_n.$ En déduire les valeurs de C_n puis A_n puis $B_n.$
4. Montrer que $\frac{I_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$ et conclure.

10 Calcul de l'intégrale de Gauß

1. Rappeler l'équivalent de l'intégrale de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$
4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1/2)^2} dx.$

11 Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \operatorname{Arctan} t}{(1+t^2)^2} dt.$

1. Montrer que I est convergente.
2. Montrer que $F : x \mapsto \int_{1/x}^x \frac{t \operatorname{Arctan} t}{(1+t^2)^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*.$
3. Calculer $I.$

12 Déterminer un équivalent de Arccos en 1.

Solution de 12 :

Par sommation des relations de comparaison dans le cas de convergence, au voisinage de 1,

$$\operatorname{Arccos} x = - \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \sqrt{1-x}.$$

Autre raisonnement possible, $\operatorname{Arccos} x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ donc

$$\operatorname{Arccos} x \sim \underbrace{\sin(\operatorname{Arccos} x)}_{\substack{\in [0, \pi] \\ \geq 0}} = +\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{Arccos} x)} = \sqrt{1-x^2} \sim \sqrt{2} \sqrt{1-x}.$$

13 Soit $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt.$

1. Montrer que I converge et que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t) dt.$

2. Calculer I .

3. Montrer que $J = \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t} dt$ converge et la calculer.

4. Montrer que $K = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{t(1+t^2)} dt$ converge et la calculer.

14 Soit $f : x \mapsto \int_0^x \ln(\ln(1+t)) dt$.

Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer un équivalent simple de f en 0.

Solution de 14 :

$g : x \mapsto \ln(\ln(1+x))$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, au voisinage de 0,

$$f(x) = \ln(x + o(x)) = \ln x + \ln(1 + o(1)) = \ln x + o(\ln x) \sim \ln x$$

donc, par sommation des relations de comparaison dans le cas de convergence, la fonction de référence $\ln$ étant négative sur $]0, 1]$ (il suffit de tout multiplier par -1 pour se mettre dans le contexte du programme),

$$f(x) \sim \int_0^x \ln t dt = [t \ln t - t]_0^x = x \ln x - x = x \ln x + o(x \ln x) \sim x \ln x$$

15 Quelle est la nature de $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln t} dt$?

Donner un développement asymptotique de $\int_e^x \frac{1}{\ln t} dt$ au voisinage de $+\infty$.

16 CCINP – Mines-Telecom Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $G(x, y) = \int_0^y \frac{t - [t]}{t(t+x)} dt$.

1. Montrer que $G(x, y)$ est bien définie et que pour x fixé, $G(x, y)$ tend vers une limite $G(x)$ lorsque $y \rightarrow +\infty$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, G(n, y) = \frac{1}{n} \left(\int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$.

3. On note $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n+1) - H(n) - \frac{1}{2n}$ converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

Solution de 16 : CCINP – Mines-Telecom

1. Soient $x, y > 0$.

La fonction

$$f : t \mapsto \frac{t - [t]}{t(t+x)}$$

est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[\supset]0; y]$ et quand $t \rightarrow 0$,

$$f(t) = \frac{t}{t(t+x)} = \frac{1}{t+x} \rightarrow \frac{1}{x}$$

donc f est prolongeable par continuité en 0. Par suite, l'intégrale définissant $G(x, y)$ existe bien.

Quand $t \rightarrow +\infty$,

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{O(1)}{t(t+x)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc f est intégrable sur $]0; +\infty[$. Par suite, $G(x, y)$ converge quand $y \rightarrow +\infty$ vers

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t - [t]}{t(t+x)} dt$$

2. On remarque que

$$\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+n} \right)$$

et l'on en déduit

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \int_0^y \left(\frac{t - [t]}{t} - \frac{t - [t]}{t+n} \right) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \left(\int_0^y \frac{t - [t]}{t} dt - \int_n^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right).$$

Enfin par la relation de Chasles

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \left(\int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right).$$

3. Puisque

$$0 \leq \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \leq \frac{1}{y} \int_y^{y+n} (t - [t]) dt \leq \frac{n}{y}$$

on obtient quand $y \rightarrow +\infty$

$$G(n) = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt$$

et l'on a alors

$$H(n) = \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt.$$

Par suite,

$$H(n) - H(n-1) = \int_{n-1}^n \frac{t - [t]}{t} dt = \int_0^1 \frac{u}{u + (n-1)} du$$

puis

$$H(n) - H(n-1) = 1 - (n-1) \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right).$$

Par développement limité, on obtient

$$H(n) - H(n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la série de terme général

$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} \right).$$

On a

$$\sum_{k=1}^n \left(H(k) - H(k-1) - \frac{1}{2k} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} S + o(1)$$

donc

$$H(n) - H(1) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} S + o(1).$$

Sachant

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

on obtient

$$H(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n)$$

puis

$$G(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2n}.$$

17

Montrer que $I = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx$ converge et la calculer.

Solution de 17 :

Passer par les sommes partielles et utiliser la formule de Stirling.

Réponse : $\ln \frac{2}{\pi}$.

Soit $A \geq 1$ et $N = [A]$. Alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{(-1)^n}{x} dx + \int_N^A \frac{(-1)^N}{x} dx = \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) + (-1)^{[A]} \ln \frac{A}{[A]}$$

On a déjà $1 \leq \frac{1}{[A]} < 1 + \frac{1}{[A]}$ et $A \mapsto (-1)^{[A]}$ bornée donc $(-1)^{[A]} \ln \frac{A}{[A]} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$.

On continue le calcul en séparant dans la somme partielle les termes de rang pair et les termes de rang impair.

Supposons, sans perte de généralité, que N est impair et s'écrit $N = 2p + 1$ (si N est pair, cela revient à sortir un terme de la somme partielle, dont la limite est nulle). On écrit alors

$$\sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \sum_{k=1}^p \ln \left(\frac{2k+1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^p \ln \left(\frac{2k}{2k-1} \right) = \ln \left(\prod_{k=1}^p \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} \right) = \ln \left(\frac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p} p!^4} \right)$$

La formule de Stirling et un peu d'huile de coude permettent d'écrire

$$\frac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p} p!^4} \sim \frac{2}{\pi e} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

Donc l'intégrale converge et sa valeur est $\ln \frac{2}{\pi}$.