

Dire si les intégrales suivantes ont un sens. Lorsqu'il y a un paramètre, dire pour quelles valeurs du paramètre les intégrales ont un sens.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$

La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus

$$|f(t)| =_{t \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$.

Autre rédaction : $|f(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ donc, par comparaison, comme $\frac{1}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \dots$

Autre rédaction :

$$|f(t)| =_{t \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Autre rédaction (déconseillée) :

$$f(t) =_{t \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

parfaitement équivalent à la première rédaction, vu que le O « se moque du signe ». Mais si le correcteur sait que vous, vous faites attention au signe, et que vous savez que l'intégrabilité de f est celle de $|f|$, c'est mieux.

Autre rédaction : La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus

$$|f(t)| =_{t \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$.

Cette rédaction ne semble pas très naturelle ici, sauf si on préfère vraiment les o aux O .

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctant} t}{t} dt$$

La fonction $f : t \mapsto \frac{\operatorname{Arctant} t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

On a

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t}$$

donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Or $f \geq 0$, on ne peut donc pas avoir une intégrale « semi-convergente ».

$$3. \int_0^1 \ln t \, dt$$

Première rédaction : $\ln$ est continue sur $]0, 1]$, négative. Par croissances comparées,

$$|\ln t| = o_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right)$$

donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$. (les valeurs absolues sur le $\ln$ sont facultatives).

Deuxième rédaction : Soit $x \in]0, 1]$. Alors

$$\int_x^1 \ln t \, dt = -1 - x \ln x + x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$$

donc l'intégrale converge. Or la fonction $\ln$ est de signe constant, donc elle est intégrable sur $]0, 1]$.

$$4. \int_0^1 (-\ln t)^\alpha \, dt \quad (\alpha \in \mathbf{R})$$

Même si cela ressemble un petit peu à l'exemple précédent, c'est en fait très différent.

D'abord parce qu'ici on ne sait pas calculer de primitive.

Ensuite parce qu'il y a un piège : on risque de ne pas penser au problème en 1... Or, si $\alpha < 0$, il y a un problème en 1.

La fonction $f : t \mapsto (-\ln t)^\alpha$ est continue sur $]0, 1[$, positive.

• Etude sur $]0, 1/2[$:

Par croissances comparées,

$$f(t) = o_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right)$$

donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $]0, 1/2]$.

• Etude sur $[1/2, 1[$:

Partant de

$$\ln t = \ln(1 + t - 1) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} t - 1$$

on obtient

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} (1 - t)^\alpha$$

et donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1/2, 1[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

Conclusion : f est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

5. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$

La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, **positive**.

• Etude sur $]0, 1]$:

On a $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. Donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $]0, 1]$.

• Etude sur $[1, +\infty[$:

On a $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

6. $\int_0^{+\infty} \cos t \, dt$

$\int_0^x \cos t \, dt$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow +\infty$. L'intégrale n'a donc pas de sens.

7. $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) \, dt$

La fonction $t \mapsto \cos(t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{u}$, $u = t^2 : u \mapsto \sqrt{u}$ est une bijection C^1 de $]0, +\infty[$ sur lui-même. L'existence de l'intégrale équivaut à celle de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \, du$$

et en cas d'existence elles sont égales. Comme

$$\frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

la fonction $u \mapsto \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}$, positive, est intégrable sur $]0, 1]$.

En revanche, l'existence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} du$$

demande une intégration par parties comme l'exemple standard vu dans le cours de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

8. $\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{t}) dt$

La fonction $t \mapsto \cos(\sqrt{t})$ est continue sur $[0, +\infty[$.

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$. L'existence de l'intégrale équivaut à celle de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} 2u \cos u du$$

et en cas d'existence elles sont égales. Or, déjà $\int_0^{+\infty} \cos u du$ ne converge pas, alors celle-ci... On peut calculer par parties $\int_0^x u \cos u du$ et voir qu'il n'y a pas de limite en $+\infty$. Ou encore dire que l'aire sous une arche est grande : si $k \geq 1$,

$$\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} u \cos u du \geq (-\pi/2+2k\pi) \int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} \cos u du = (4k-1)\pi$$

(On a pris soin de considérer une zone de positivité du cosinus, pour pouvoir multiplier des inégalités par $\cos u$ sans en changer le sens). Or si $\int_0^x u \cos u du$ avait une limite réelle en $+\infty$, $\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} u \cos u du$ tendrait vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$ (relation de Chasles).

9. $\int_0^{\pi/2} \tan x dx$

La fonction $\tan$ est continue, positive sur $[0, \pi/2[$. Plusieurs méthodes sont tout aussi valables :

- Un équivalent : $\tan(x) = \frac{1}{\tan(\pi/2 - x)} \underset{x \rightarrow \pi/2}{\sim} \frac{1}{\pi/2 - x}$, donc pas d'intégrabilité (comparaison à une fonction de Riemann), pas plus de convergence d'intégrale puisque pour une fonction positive c'est la même chose.
 - Un calcul de $\int_0^X \tan x \, dx$ (avec un $\ln$) qui aboutit bien sûr à la même conclusion.
 - un changement de variable $x = \text{Arctan}(u)$. Même conclusion.
-

10. $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est continue, négative sur $]0, 1[$. Notons-la f .
On a

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$$

donc, par croissances comparées,

$$|f(t)| = o_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right)$$

(valeurs absolues facultatives, mais recommandées) ce qui donne l'intégrabilité sur $]0, 1/2]$. Mais aussi

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\sqrt{1-t}$$

et donc f est prolongeable par continuité à $]0, 1]$, pas de problème donc d'intégrabilité sur $[1/2, 1]$.

11. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbf{R})$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \geq 0$ et prolongeable par continuité à $[0, +\infty[$ si $\alpha < 0$ (elle a dans ce dernier cas pour limite 0 en 0). Si $\alpha < 0$, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. Si $\alpha = 0$, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$. Si $\alpha > 0$, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$. Par comparaison à une fonction de Riemann, il y a intégrabilité (ou convergence de l'intégrale, ici c'est la même chose) si et seulement si $\alpha > 1$.

12. $\int_e^{+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} dx \quad (\alpha, \beta \text{ réels}).$

La fonction $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ est continue positive sur $[e, +\infty[$. Si $\beta > 1$, fixons $\gamma \in]1, \beta[$. Par croissances comparées,

$$f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^\gamma} \right)$$

et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, f est intégrable sur $[e, +\infty[$.

Si $\beta < 1$, par croissances comparées,

$$\frac{1}{x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (f(x))$$

et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, f n'est pas intégrable sur $[e, +\infty[$.

Si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$, encore non intégrabilité par le même argument.

Si $\beta = 1$ et $\alpha = 0$, non intégrabilité directe (Riemann).

Si $\beta = 1$ et $\alpha < 0$, on ne peut plus utiliser de comparaison (ce n'est plus assez « fin »), on calcule

$$\int_e^X \frac{(\ln x)^\alpha}{x} dx$$

car on sait trouver une primitive (on distingue le cas $\alpha = -1$, la primitivation se fait avec un $\ln(\ln x)$, sinon la primitivation se fait avec une puissance de $\ln x$). On trouve qu'il y a intégrabilité si et seulement si $\alpha < -1$. Bien sûr on a déjà rencontré ce genre de chose, c'est une intégrale « de Bertrand ».

13. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} dx$

Fonction continue, positive sur $[1, +\infty[$. Il est judicieux d'obtenir un équivalent en $+\infty$. Pour cela, classiquement, mise en facteur dans $1+x$ du terme prédominant, x :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= x^{1/2} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1/2} - 1 \right) \\ &= x^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2x} + \underset{+\infty}{o} \left(\frac{1}{x} \right) - 1 \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^{1/2}} \end{aligned}$$

Donc $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^{3/2}}$, ce qui donne l'intégrabilité par comparaison à l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$).

14. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t) dt$, P fonction polynôme

Fonction continue sur $] -\infty, +\infty[$. Par croissances comparées, $|e^{-t^2} P(t)| = o_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ d'où l'intégrabilité.

15. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$

Fonction continue sur $]0, +\infty[$; intégrabilité sur $]0, 1[$ assez simple grâce à l'équivalent

$$\left| \frac{\sin \sqrt{t}}{t} \right| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et la référence à Riemann.

D'autre part, par changement de variable $t = u^2$, $u = \sqrt{t}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$ a même nature (et dans le cas de convergence, même valeur) que $2 \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$, intégrale notoirement semi-convergente (mais il faut savoir le redémontrer). Convergence, donc, on peut même dire semi-convergence. Une astuce consistait à écrire le dénominateur $\sqrt{t} \times \sqrt{t}$, intégrer par parties car on sait primitiver $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$, on aboutit au même résultat.

16. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\text{sh } t}}$

Fonction continue positive sur $]0, +\infty[$, équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0, équivalente à $\sqrt{2}e^{-t/2}$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable.

17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}$

Fonction continue positive sur $] -\infty, +\infty[$, équivalente au voisinage de $+\infty$ à e^{-t} , équivalente au voisinage de $-\infty$ à $\frac{e^t}{t^2}$. On en conclut l'intégrabilité.

18. $\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$ (α, β réels)
Grosse discussion.

19. $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ (α réel)

Fonction continue, de signe constant sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$, ce qui autorise à utiliser des équivalents. Au voisinage de 0, un équivalent est $t \ln t$, il y a donc une limite réelle en 0. Donc pas de problème. Au voisinage de $+\infty$, un équivalent est $\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}$. Si $2\alpha - 1 > 1$, on fixe $\beta \in]1, 2\alpha - 1[$, on aura

$$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} =_{t \rightarrow +\infty} o \left(\frac{1}{t^\beta} \right)$$

et on conclut à l'intégrabilité. Si $2\alpha - 1 \leq 1$, on a

$$\frac{1}{t} =_{t \rightarrow +\infty} o \left(\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \right)$$

et on conclut à la non intégrabilité.

20. $\int_0^1 \frac{(-\ln t)^\alpha}{(1-t)^\beta} dt$

Similaire au 4. ; la fonction est continue positive sur $]0, 1[$, par croissances comparées elle est $_{t \rightarrow 0} o \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ donc intégrable sur $]0, 1/2]$; au voisinage de 1 elle est équivalente à $(1-t)^{\alpha-\beta}$, donc intégrable sur $[1/2, 1[$ si et seulement si $\alpha - \beta > -1$.