

INDICATIONS

1. Continuité

10 ✦

1. Considérer $\sum f\left(\frac{k}{n}\right)$

2. Uniforme continuité

12 ★ Pour $f : x \mapsto x \ln x$, faire un dessin.

Montrer la non UC au voisinage de 0 en posant $x_n = \frac{1}{n} + h_n$ et $y_n = \frac{1}{n}$ où $h_n \rightarrow 0$ à déterminer en faisant une étude asymptotique de $f(x_n) - f(y_n)$...

13 ★ Utiliser le théorème de Heine. Remarquer qu'il y a un problème de raccord entre deux périodes et se convaincre que le théorème de Heine doit être appliqué sur plus d'une période, par exemple sur $[0, 2T]$.

14 ★ Combiner la définition de la limite et le théorème de Heine.

3. Dérivabilité

17 ✦

1. Prolonger par continuité.
2. Utiliser les définitions/propriétés des limite pour se ramener au cas d'un segment. Ou (mieux!) : composer à gauche et/ou à droite par une fonction bien régulière (typiquement bijective de classe $\mathcal{C}^\infty$ et dont la réciproque l'est aussi) pour se ramener sur un segment quitte à prolonger par continuité.

18 ✦ Obtenir la forme par récurrence.

Pour montrer que le polynôme est simplement scindé, appliquer beaucoup de fois le théorème de Rolle y compris sa version généralisée avec les limites en $\pm\infty$.

19 ✦

1. Reprendre la démonstration du théorème de Rolle. Montrer par exemple si $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$ qu'un maximum local est atteint sur $]a, b[$ et conclure avec la condition nécessaire d'extremum local.
2. prendre m tel que $f'(a) < m < f'(b)$. Poser une fonction g pour que cela se traduise par $g'(a) > 0$ et $g'(b) < 0$ et utiliser la question précédente.

20 ✦ S'inspirer de la démonstration du TAF.

21 ★ S'inspirer de la démonstration du TAF.

22 ✦

1. Croissances comparées, application répétées du théorème de la limite de la dérivée.

4. Fonctions convexes

26

1. Utiliser la définition
2. Utiliser la question précédente

27 ✦

Vérifier que $((1-t)f(x) + tf(y))((1-t)g(x) + tg(y)) \leq (1-t)f(x)g(x) + tf(y)g(y)$ en développant puis factorisant la différence.

28

Utiliser la définition

29

Introduire $f : x \mapsto x^{n+1}$ et une de ses tangentes.

30

Utiliser $\ln \circ \ln$.

31

Convexité de $g : x \mapsto x^2 - 2f(x)$

32 ★

Noter θ_k les angles au centre et montrer que le périmètre vaut $\sum_{k=1}^n 2R \sin \theta_k$

33 ✦

1. Riemann + Jensen discret.
2. Courbe au dessus de la tangente.

$$3. \gamma = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

34 ✦

Convexité de $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

35 ★

Sinon, si on a $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$ et $z > x$, utiliser la croissante du taux d'accroissement τ_x entre y et z pour aboutir à une contradiction. L'autre cas se traite de manière analogue.

36 ★

Croissance d'un taux d'accroissement quelconque entre 1 et $x > 1$...

37 ★

1. Utiliser la croissance d'une fonction taux d'accroissement en un point quelconque.
2. Remarquer que ℓ est aussi la limite de tout taux d'accroissement qui est croissant. et conclure par le théorème de la limite monotone.

5. Intégrales sur des segments

38

- | | | | |
|---|-------------------------|-------------------|---------------------------|
| 1. IPP | 6. DES | 12. Bioche | 17. Forme canonique et CV |
| 2. IPP et transformer $\sin^2$ et linéariser. | 7. Méthode classique | 13. CV | 18. Bioche |
| 3. CV | 8. DES | 14. CV | 19. Bioche |
| 4. CV | 9. $+\dots-\dots$ ou CV | 15. CV | 20. CV |
| 5. Direct | 10. CV | 16. CV $\times 2$ | |
| | 11. Direct ou Bioche | | |

40

Intégrer $g : t \mapsto f(t) - t$.

41

Appliquer le TAF à $\ln(f)$

42

Vérifier que $I_n \rightarrow 1$ puis faire une IPP dans cette majoration.

44

Lemme de Riemann-Lebesgue

1. IPP
2. Théorème de Weierstraß
3. Théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier

45

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

49

Utiliser une somme de Riemann.

51

1. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale ou bien l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$.
2. Déterminer le minimum de $\frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ à l'aide d'une étude de fonction.

52

1. Continuité sur un segment.
2. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et a : (1)
Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et b : (2)
Éliminer les $f''(x)$ avec $(b-x)(1) + (x-a)(2)$, puis majorer en valeur absolue.
3. Pas de difficulté.

53

Appliquer trois fois la formule de Taylor-Young à l'ordre 3.